

ELETTROMAGNETISMO

PARTE I

**PIERO CALDIROLA
MARCELLO FONTANESI
ELIO SINDONI**

SECONDA EDIZIONE

MASSON

Milano • Parigi • Barcellona • Bonn
1991

PREFAZIONE

Il contenuto di questo volume, e di quelli che lo seguiranno, è stato tratto dai corsi di lezioni di Fisica Generale II che negli ultimi anni gli autori hanno tenuto presso l'Università di Milano agli studenti di fisica del secondo anno. Nell'esporre gli argomenti si è seguita una linea leggermente diversa da quella che nei decenni precedenti costituiva un po' una tradizione quasi unanimemente rispettata.

Tenendo conto infatti che la parte più prettamente sperimentale viene oggi sviluppata nei corsi di Esperimentazione e di Laboratorio e che pure in questa sede si è soliti svolgere applicazioni pratiche e problemi, gli Autori hanno maggiormente insistito sui fondamenti concettuali dell'Elettrologia e dell'Ottica partendo dalle leggi sperimentali più semplici che costituiscono il punto di inizio per qualsiasi esposizione organica della materia.

Così nei primi due volumi vengono sviluppate le nozioni di elettricità, di magnetismo e di elettromagnetismo che trovano in ultimo il loro inquadramento definitivo nelle equazioni di Maxwell che, una volta stabilite, permettono di trattare in maniera organica capitoli assai generali, come ad esempio quello delle onde elettromagnetiche.

Un primo problema che si pone all'insegnante che affronta l'esposizione dell'elettromagnetismo è il seguente: conviene attenersi ad una trattazione macroscopica dei fenomeni ignorando la costituzione atomica e subatomica della materia o partire invece dalle proprietà fondamentali dei costituenti ultimi dell'atomo? La linea seguita nel presente volume è quella di esporre, in linea di massima, le proprietà elettriche e magnetiche della materia considerata come un continuo, cioè da un punto di vista macroscopico, salvo introdurre spiegazioni a livello microscopico quando ciò appare essenziale per una «comprensione» moderna dei fenomeni: così nello studio della corrente e del comportamento dei corpi rispetto a questo fenomeno, l'argomento viene illustrato anche da un punto di vista microscopico esponendo in forma elementare la teoria delle bande elettroniche dei solidi che permette una chiara classificazione di questi fra conduttori, isolanti e semiconduttori. Analogamente la teoria fenomenologica della polarizzazione (sia elettrica sia magnetica) è completata dalla teoria molecolare di Langevin-Debye e da quella del comportamento elettrico e magnetico dell'atomo.

Questo modo di procedere ha a nostro avviso il vantaggio di mostrare l'evoluzione di tutta la ricerca e delle idee non solo da un punto di vista storico (che non sempre ovviamente viene seguito) ma anche e soprattutto dal punto di vista del metodo induttivo che è quello che ha sempre portato alle grandi leggi della fisica.

Un'ultra difficoltà, che di regola si presenta ai corsi di fisica generale nelle Università italiane, è quella determinata dallo sfasamento temporale, nel processo di apprendimento dello studente, tra strumenti matematici necessari allo studio della fisica e l'impiego di questi nella esposizione del programma di fisica. Questa difficoltà nell'Università di Milano è stata in parte superata mediante l'introduzione dei corsi semestrali che permettono, almeno entro certi limiti, di far precedere lo studio dell'analisi matematica a quello della fisica generale. Ciò naturalmente non esclude che, come è fatto nel presente volume, le prime lezioni siano dedicate al calcolo vettoriale di cui si fa costante uso nel corso: in questo modo è possibile anche mettere nella forma più adeguata e più direttamente utilizzabile nozioni apprese, magari in forma apparentemente diversa, in altra sede.

Infine ci sembra onesto che i tre volumi del corso Elettromagnetismo I e II e Ottica contengano qualcosa di più di quello che di regola si riesce ad esporre in un corso di una sessantina di lezioni, sia pure integrata dal lavoro dei «gruppi» in cui gli studenti sono divisi per approfondire, sotto la guida di un giovane laureato, gli argomenti svolti nelle lezioni ufficiali. Ma ci è sembrato utile fare ciò per ragioni di completezza.

Infine ci sembra onesto far presente che i tre volumi del corso (teoria dell'elettromagnetismo I e II e fenomeni ondulatori) contengono qualcosa di più di quello che di regola si riesce ad esporre in un corso di una sessantina di lezioni, sia pure integrate dal lavoro dei «gruppi» in cui gli studenti sono divisi per approfondire, sotto la guida di un giovane laureato, gli argomenti svolti nelle lezioni ufficiali. Ma ci è sembrato utile fare ciò per ragioni di completezza.

In particolare il capitolo, abbastanza esteso, sulla teoria della relatività ristretta alla fine del secondo volume trova difficilmente nel corso il tempo necessario per essere integralmente o talvolta anche solo parzialmente svolto; esso costituisce però per lo studente diligente o per colui che voglia comunque formarsi un certo bagaglio di conoscenze di fisica, sia per le applicazioni tecniche sia per l'insegnamento, una fonte di informazioni sicuramente utili.

GLI AUTORI

INDICE

CAPITOLO 1

ANALISI VETTORIALE

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Operazioni con vettori | 1 |
| 1.2 | Il gradiente | 4 |
| 1.3 | Linee di forza e sorgenti di un campo vettoriale | 6 |
| 1.4 | Integrale di linea - La circuitazione | 7 |
| 1.5 | Il flusso e la divergenza - Teorema della divergenza | 9 |
| 1.6 | Il Rotore. Il teorema di Stokes | 13 |
| 1.7 | Operatori vettoriali del secondo ordine | 16 |

CAPITOLO 2

ELETTROSTATICA DI SISTEMI DI CARICHE NEL VUOTO

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | La carica elettrica | 22 |
| 2.2 | La legge di Coulomb | 24 |
| 2.3 | Principio di sovrapposizione e distribuzione di cariche | 25 |
| 2.4 | Il campo elettrico | 26 |
| 2.5 | Il potenziale elettrico | 28 |
| 2.6 | Energia potenziale di una sistema di cariche | 32 |
| 2.7 | Il teorema di Gauss | 34 |
| 2.8 | Campo elettrico generato da semplici distributori di cariche | 36 |
| 2.9 | Conduttori ed isolanti | 41 |
| 2.10 | Conduttori in presenza di campo elettrico - Teorema di Coulomb | 41 |
| 2.11 | Induzione elettrostatica | 46 |

CAPITOLO 3

PROBLEMA GENERALE DELL'ELETTROSTATICA

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Equazioni di Poisson | 49 |
| 3.2 | Equazioni di Laplace e funzioni armoniche | 50 |

VIII

| | | |
|------|--|----|
| 3.3 | Funzione armonica fondamentale | 53 |
| 3.4 | Considerazioni sulle proprietà del campo elettrico in relazione ai teoremi precedenti sulle funzioni armoniche | 54 |
| 3.5 | Caso di cariche puntiformi - La funzione impropria è di Dirac | 56 |
| 3.6 | Metodo delle cariche immagini | 59 |
| 3.7 | Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cartesiane | 62 |
| 3.8 | Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche | 66 |
| 3.9 | Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche | 71 |
| 3.10 | Relazione tra cariche e potenziali di un sistema di n conduttori | 74 |
| 3.11 | Capacità di un conduttore - Il condensatore | 75 |
| 3.12 | Condensatori in serie e in parallelo | 79 |
| 3.13 | Energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore | 81 |

CAPITOLO 4

I DIELETTRICI

| | | |
|------|--|-----|
| | Introduzione | 83 |
| 4.1 | Il dipolo elettrico | 85 |
| 4.2 | Sviluppo in multipoli del potenziale di una distribuzione di cariche | 88 |
| 4.3 | Energia potenziale di un dipolo. Forze agenti su un dipolo | 91 |
| 4.4 | Il vettore polarizzazione elettrica | 95 |
| 4.5 | Campo elettrico esterno generato da un dielettrico polarizzato | 99 |
| 4.6 | Campo elettrico all'interno di un dielettrico | 106 |
| 4.7 | Il teorema di Gauss nei dielettrici | 110 |
| 4.8 | Suscettività e permittività dielettrica | 112 |
| 4.9 | Condizioni al contorno per i vettori E e D | 114 |
| 4.10 | Carica microscopica immersa in un dielettrico infinitamente esteso | 117 |
| 4.11 | Campo elettrico generato da una sfera di dielettrico uniformemente polarizzato | 119 |
| 4.12 | Sfera di dielettrico in un campo elettrico uniforme | 121 |
| 4.13 | Condensatore piano con dielettrico | 122 |
| 4.14 | Energia del campo elettrostatico | 126 |

CAPITOLO 5

ASPETTI MOLECOLARI DELLA TEORIA DEI DIELETTRICI

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Il campo elettrico molecolare | 129 |
| 5.2 | La polarizzabilità e l'equazione di Clausius-Mossotti | 133 |
| 5.3 | Polarizzabilità delle molecole non polari | 133 |
| 5.4 | Polarizzabilità delle molecole polari | 135 |
| 5.5 | Polarizzabilità di molecole anisotrope | 139 |

CAPITOLO 6

STRUTTURA ATOMICA DELLA MATERIA

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Atomo di Bohr | 141 |
| 6.2 | Spettro dell'atomo di idrogeno - Livelli energetici e numeri quantici | 145 |
| 6.3 | Atomi a più elettroni - Il principio di esclusione di Pauli | 150 |
| 6.4 | Struttura elettronica dei solidi - Formazione delle bande | 151 |

| | |
|---|-----|
| 6.5 Moto degli elettroni in un solido | 153 |
| 6.6 Distribuzione statistica dell'energia di un sistema di particelle identiche | 155 |
| 6.7 Distribuzione elettronica nei metalli | 157 |

CAPITOLO 7

LA CORRENTE ELETTRICA STAZIONARIA

| | |
|---|-----|
| 7.1 L'intensità di corrente | |
| 163 | |
| 7.2 La corrente come trasporto di cariche | 164 |
| 7.3 La densità di corrente | |
| 165 | |
| 7.4 La conducibilità elettrica nei metalli | |
| 168 | |
| 7.5 La resistività. Legge di Ohm | |
| 171 | |
| 7.6 Tempo di rilassamento | |
| 174 | |
| 7.7 Forze elettromotrici | 176 |
| 7.8 Collegamenti tra resistori | |
| 180 | |
| 7.9 Legge di Ohm generalizzata | |
| 182 | |
| 7.10 La legge di Joule | |
| 183 | |
| 7.11 Lavoro di estrazione di un elettrone da un metallo | 186 |
| 7.12 Effetto termoionico | |
| 189 | |
| 7.13 Potenziale di Volta ed effetto Peltier | 189 |
| 7.14 Effetto fotoelettrico | |
| 194 | |

1

Analisi Vettoriale

In questo capitolo sono riportate alcune semplici nozioni di analisi vettoriale che saranno utilizzate per lo svolgimento degli argomenti riguardanti l'elettrostatica e l'elettromagnetismo. Abbiamo ritenuto utile raccogliere queste informazioni in un capitolo introduttivo per permettere al lettore di rivedere alcuni concetti che dovrebbero essere già noti e di familiarizzarsi con le notazioni che saranno impiegate nel testo.

1.1 Operazioni con vettori

Nello studio della fisica si incontrano grandezze, come la lunghezza, la massa, la temperatura, che sono completamente definite da un valore assoluto ed eventualmente da un segno. Queste grandezze sono dette *scalari*. Si chiama *campo scalare* una funzione caratterizzata in ogni punto dello spazio da un valore numerico relativo ad una certa scala di misura. Esistono inoltre grandezze fisiche, come la velocità, la forza, la quantità di moto, che sono caratterizzate oltre che da un valore assoluto anche da una direzione e da un verso. Tali grandezze vengono dette *vettoriali* e si chiama *campo vettoriale* una regione dello spazio per ogni punto P della quale è definito un vettore (che, per facilitare l'intuizione, converrà immaginare applicato al punto).

Nel testo, impiegheremo essenzialmente un sistema di assi di riferimento ortogonali cartesiano a tre dimensioni, usando le variabili x, y, z .

Una grandezza vettoriale sarà indicata con un simbolo stampato in grassetto, per esempio \mathbf{F} ; lo stesso simbolo stampato non in grassetto, F , indicherà il modulo o valore assoluto della stessa grandezza ¹⁾. La terna sinistrorsa di assi cartesiani sarà individuata dai tre versori, vettori unitari, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} e le componenti di un vettore rispetto a questi tre assi saranno indicate con F_x , F_y ed F_z .

Assegnata quindi una terna ortogonale \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , un vettore \mathbf{F} è rappresentato nella forma:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (1.1)$$

dove $F_x = F \cos \alpha_1$, $F_y = F \cos \alpha_2$, $F_z = F \cos \alpha_3$ con α_1 , α_2 , α_3 che rappresentano gli angoli tra \mathbf{F} ed i tre versori fondamentali \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} .

Nel caso di un campo vettoriale le componenti F_x , F_y , F_z del vettore \mathbf{F} saranno funzioni del punto P , cioè di x , y , z .

Dati due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} si definisce *somma dei due vettori* un vettore \mathbf{C} che ha per componenti la somma delle rispettive componenti dei due vettori dati:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.2)$$

con:

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z. \quad (1.3)$$

Questa definizione di somma di due vettori è del tutto equivalente alla nota legge del parallelogramma per la composizione di due vettori applicati allo stesso punto, e per essa vale la proprietà associativa e commutativa.

Dato un vettore \mathbf{A} e un numero m si definisce *prodotto tra il vettore e il numero*, e si indica con $m\mathbf{A}$, il vettore \mathbf{B} che ha per componenti le componenti del vettore originario moltiplicate per m :

$$B_x = mA_x, \quad B_y = mA_y, \quad B_z = mA_z. \quad (1.4)$$

Il vettore \mathbf{B} ha la stessa direzione del vettore \mathbf{A} e verso uguale od opposto a seconda che m sia un numero positivo o negativo. Se prendiamo $m = -1$ possiamo definire il *vettore \mathbf{B} opposto di un vettore \mathbf{A}* nella forma:

$$\mathbf{B} = (-1)\mathbf{A} \quad (1.5)$$

con:

$$B_x = -A_x, \quad B_y = -A_y, \quad B_z = -A_z.$$

Tale vettore si indica di regola con $-\mathbf{A}$.

Tenendo conto della (1.5), l'operazione di *sottrazione tra due vettori* \mathbf{A} e \mathbf{B} è definita come addizione tra il vettore \mathbf{A} e l'opposto del vettore \mathbf{B} :

¹⁾ Nelle figure i vettori vengono rappresentati mediante il simbolo corrispondente sottolineato. Per esempio $\mathbf{F} = \underline{F}$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1) \mathbf{B}$$

Dati due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} definiamo *prodotto scalare* o *prodotto interno* il numero dato da:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

o in maniera equivalente:

$$(1.8) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Per il prodotto scalare valgono la proprietà commutativa e quella distributiva della somma rispetto al prodotto.

Si definisce *prodotto vettoriale* o *prodotto esterno* tra due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , indicato con $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, un vettore \mathbf{C} le cui componenti sono così definite:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y; \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z; \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x. \quad (1.9)$$

In maniera equivalente si può dire che il vettore \mathbf{C} , risultato del prodotto

$$\mathbf{C} = AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

vettoriale tra \mathbf{A} e \mathbf{B} , è un vettore che ha per modulo la quantità:

$$(1.10)$$

per direzione quella ortogonale al piano individuato dai vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} e per verso quello che vede \mathbf{A} sovrapporsi a \mathbf{B} percorrendo in senso antiorario l'angolo minore.

Si verifica facilmente che, nel caso del prodotto vettoriale, vale la relazione:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (1.11)$$

Ricordiamo che il prodotto vettoriale può essere espresso anche mediante la matrice:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

Gli elementi delle tre righe della matrice rappresentano rispettivamente i tre versori fondamentali e le componenti dei due vettori. Il risultato del prodotto vettoriale è facilmente ricavabile calcolando il determinante.

Si definisce *doppio prodotto vettoriale* tra tre versori \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , il vettore $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. Per il doppio prodotto vettoriale valgono le seguenti identità :

$$(1.13)$$

$$(1.14)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

dalle quali è facile constatare come questo prodotto non goda della proprietà associativa.

È utile inoltre ricordare il *prodotto misto* per il quale valgono le identità:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Il risultato di questo prodotto non varia scambiando il segno di prodotto scalare con quello di prodotto vettoriale o permutando ciclicamente i vettori.

Può sorgere talvolta il problema di risolvere una equazione vettoriale nella quale appaia un prodotto scalare o un prodotto vettoriale. Consideriamo il primo caso. Sia data l'equazione:

$$m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad (1.16)$$

Con m ed \mathbf{A} noti e si voglia determinare il vettore \mathbf{F} . La soluzione di questa equazione è:

$$\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{B}$$

dove \mathbf{B} è un vettore di grandezza arbitraria perpendicolare ad \mathbf{A} . La soluzione della relazione (1.16) non è pertanto unica: è possibile cioè trovare infiniti vettori \mathbf{F} , ognuno con una diversa componente ortogonale ad \mathbf{A} , che soddisfino la (1.16). Consideriamo ora la seguente equazione vettoriale:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{F} \quad (1.18)$$

con \mathbf{A} e \mathbf{B} vettori noti e si voglia ricavare il vettore \mathbf{F} . La soluzione di questa equazione è:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + c\mathbf{A} . \quad (1.19)$$

Anche in questo caso la soluzione non è unica perché c è uno scalare arbitrario.

1.2 Il gradiente

Sia data una funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ definita in ogni punto x, y, z di una regione dello spazio. Chiameremo *superficie di livello* le superficie luogo dei punti dello spazio nei quali la funzione $\varphi(x, y, z)$ assume un valore costante.

Si definisce *gradiente della funzione scalare* il seguente vettore:

$$\mathbf{grad} \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} . \quad (1.20)$$

Dato un campo scalare, rappresentato in questo caso dalla funzione $\varphi(x, y, z)$, è quindi sempre possibile ricavare un campo vettoriale, tramite l'operazione di gradiente, che assegna ad ogni punto dello spazio un vettore individuato in grandezza, direzione e verso mediante la (1.20).

L'operatore $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ viene indicato spesso con il simbolo ∇ e per-

tanto il gradiente della funzione può essere anche scritto nella forma $\nabla \varphi(x, y, z)$. Nella regione di definizione della funzione $\varphi(x, y, z)$ consideriamo uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$. La funzione $\varphi(x, y, z)$ subisce, a causa di questo spostamento, un incremento:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (1.21)$$

Si definisce *derivata direzionale* della funzione $\varphi(x, y, z)$ nella direzione $d\mathbf{l}$ la variazione per unità di lunghezza della funzione nella direzione individuata dallo spostamento $d\mathbf{l}$, cioè:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dl}.$$

Essendo:

$$\frac{dx}{dl} = \cos(l, x), \quad \frac{dy}{dl} = \cos(l, y), \quad \frac{dz}{dl} = \cos(l, z)$$

possiamo scrivere la relazione (1.22) nella seguente maniera:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(l, z).$$

Mediante la (1.20) le due relazioni (1.21) e (1.24) assumono la forma:

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} \quad (1.25)$$

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad } \varphi \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dl}. \quad (1.26)$$

Dalla (1.26) si ricava che la derivata direzionale di $\varphi(x, y, z)$ lungo una certa direzione è la componente del gradiente di $\varphi(x, y, z)$ lungo quella direzione.

Vogliamo inoltre far notare che il campo vettoriale, definito tramite l'operazione di gradiente della funzione $\varphi(x, y, z)$, gode di alcune interessanti proprietà. Se infatti prendiamo in considerazione la (1.25) e la (1.26) vediamo che l'incremento della funzione e la sua derivata direzionale $d\varphi/dl$ sono massimi quando lo spostamento $d\mathbf{l}$ è parallelo alla direzione del gradiente. Da questo fatto deduciamo che la direzione e il verso del gradiente di una funzione scalare

coincidono con la direzione ed il verso lungo i quali si ha la massima variazione della funzione.

Consideriamo uno spostamento $d\mathbf{l}$ lungo una superficie di livello. Per definizione l'incremento $d\varphi$ della funzione è nullo e perciò dalla (1.25) risulta che $d\mathbf{l}$ e $\mathbf{grad} \varphi$ sono perpendicolari. Possiamo così dire che in ogni punto il vettore definito da $\mathbf{grad} \varphi(x, y, z)$ è perpendicolare alla superficie di livello passante per quel punto.

Non è detto che dato un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$ sia sempre possibile trovare una funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ tale che $\mathbf{grad} \varphi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$. Un campo vettoriale rappresentabile come gradiente di una funzione scalare prende il nome di *campo vettoriale conservativo*.

1.3 Linee di forza e sorgenti di un campo vettoriale

Faraday fu il primo fisico ad intuire la possibilità di sostituire il concetto di azione a distanza con il concetto di trasmissione continua di azioni tramite un campo vettoriale. Tuttavia egli non fu in grado di tradurre questa sua rappresentazione in uno schema sufficientemente rigoroso dal punto di vista analitico e, nel tentativo di spiegare i fenomeni sui quali indagava, introdusse il concetto di *linea di forza*: le interazioni di carattere elettromagnetico si propagano tra due punti tramite le linee di forza nello stesso modo con cui una molla in tensione trasmette tra due punti azioni di tipo meccanico.

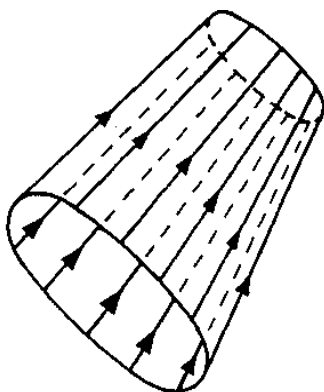


FIG. 1.1 - Tubo di forza di un campo vettoriale.

Per linea di forza di un campo vettoriale si intende una linea immaginaria la cui direzione e verso in ogni punto coincida con la direzione e il verso del vettore del campo applicato in quel punto.

Si definisce inoltre *tubo di forza* la superficie formata dall'insieme delle linee di forza passanti per tutti i punti di una linea chiusa immersa nel campo vettoriale

Il tubo di forza gode quindi della proprietà di avere in ogni suo punto il vettore del campo tangente alla superficie tubolare (Fig. 1.1).

Utilizzando il concetto di linea di forza è possibile fornire una rappresentazione grafica di un campo vettoriale in una certa regione dello spazio. D'altra parte, nota la configurazione delle linee di forza di un campo, è possibile risalire ad alcune delle caratteristiche più immediate del campo stesso.

Infatti la direzione e il verso della linea di forza in un punto forniscono la direzione e il verso del vettore del campo applicato in quel punto. Ci si può inoltre rendere conto dell'intensità del vettore del campo in una regione dello spazio ricorrendo alla seguente rappresentazione grafica. Considerato un punto $P(x, y, z)$ dello spazio sia $\mathbf{F}(x, y, z)$ il vettore ad esso applicato. Preso allora un elemento di superficie, avente area Δa_0 , perpendicolare al vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ e contenente il punto di applicazione P , si costruisca un numero di linee di forza $\Delta N = F \Delta a_0$ (dove si suppone che F sia misurato in una certa unità di misura) passanti per Δa_0 . Ripetendo l'operazione per un numero molto grande di punti si otterrà una rappresentazione grafica del campo vettoriale contenente anche l'informazione sul variare dell'intensità del vettore \mathbf{F} passando da una piccola regione all'altra dello spazio. In particolare la densità (cioè il numero per unità di area) delle linee di forza così tracciate risulterà maggiore dove il campo vettoriale è più intenso e minore dove esso è più debole.

Poiché in ogni punto dello spazio il vettore del campo deve essere unicamente definito, una linea di forza non può intersecare un'altra linea di forza. Infatti se questo avvenisse avremmo che in uno stesso punto, quello di intersezione, il vettore avrebbe due diverse direzioni.

In alcuni campi vettoriali esistono dei punti particolari nei quali si addensano infinite linee di forza. Questi punti prendono il nome di *sorgenti del campo* e più precisamente sorgenti positive se le linee di forza hanno un verso uscente dal punto, sorgenti negative se le linee di forza hanno verso entrante.

È possibile ricavare semplicemente le equazioni che descrivono una linea di forza. Consideriamo infatti un tratto infinitesimo $d\mathbf{l}$ su una linea di forza e il valore del vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ applicato in quel punto.

Il tratto infinitesimo $d\mathbf{l}$ e il vettore \mathbf{F} per definizione sono paralleli, cioè $\mathbf{F}(x, y, z) \times d\mathbf{l} = 0$. Il prodotto vettoriale è nullo se le sue componenti sono nulle; quindi ricordando la (1.9) avremo:

$$F_y dz - F_z dy = 0; \quad F_z dx - F_x dz = 0; \quad F_x dy - F_y dx = 0 \quad (1.27)$$

da cui si ottengono le equazioni differenziali della linea di forza:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (1.28)$$

1.4 Integrale di linea - La circuitazione

Consideriamo un campo vettoriale funzione del punto $\mathbf{F}(x, y, z)$ definito in una regione dello spazio; in questa regione siano dati due punti P_1 e P_2

uniti tramite una curva arbitraria C . Possiamo considerare il tratto di curva compreso tra P_1 e P_2 come formato da tanti elementi di linea $\Delta \mathbf{l}_i$. Per ognuno di questi elementi $\Delta \mathbf{l}_i$ calcoliamo il prodotto scalare $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}_i$, prendendo per \mathbf{F} il valore che il campo vettoriale assume nel punto ove è applicato quel particolare elemento $\Delta \mathbf{l}_i$. Se calcoliamo la somma dei prodotti scalari $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}_i$ su tutti gli elementi di linea compresi tra P_1 e P_2 e nello stesso tempo eseguiamo il limite per $\Delta \mathbf{l}_i$ tendente a zero otteniamo l'integrale:

$$\int_C^{P_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \quad (1.29)$$

che prende il nome di integrale di linea del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$ lungo la linea C tra i punti P_1 e P_2 .

Il risultato dell'integrale (1.29) dipende in generale dalla particolare curva scelta tra P_1 e P_2 . Tuttavia nel caso di un campo vettoriale conservativo, cioè rappresentabile come gradiente di una funzione scalare, si può dimostrare che l'integrale di linea è indipendente dalla particolare scelta della curva. Infatti se prendiamo in considerazione il campo vettoriale conservativo $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{grad} \varphi(x, y, z)$, l'integrale (1.29) può essere scritto:

$$\int_C^{P_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_C^{P_2} \mathbf{grad} \varphi(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \quad (1.30)$$

e ricordando la (1.25) (1.31)

$$\int_C^{P_2} \mathbf{grad} \varphi(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_C^{P_2} d\varphi(x, y, z) = \varphi(P_2) - \varphi(P_1).$$

Il risultato ottenuto è indipendente dalla curva C lungo la quale abbiamo eseguito l'integrazione e dipende solo dagli estremi di integrazione.

In maniera analoga a quanto fatto per ricavare la (1.29) è possibile definire un integrale lungo una linea chiusa. Questo integrale, scritto nella forma

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \quad (1.32)$$

prende il nome di *circuitazione del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x, y, z)$ lungo la linea chiusa C e dipende in generale dalla curva considerata. Nel caso però di campo conservativo, come è immediato ricavare dalla (1.31), abbiamo che:

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = [\varphi(P_2) - \varphi(P_1)] + [\varphi(P_1) - \varphi(P_2)] = 0.$$

Possiamo dire pertanto che la circuitazione di un campo conservativo è nulla qualunque sia la linea chiusa C su cui venga eseguita l'integrazione.

1.5 Il flusso e la divergenza - Teorema della divergenza

Sia $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vettoriale ed S una superficie chiusa. Scomponiamo la superficie S in un numero abbastanza grande di elementi superficiali Aa_i . Se questi elementi sono sufficientemente piccoli il vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ varia poco all'interno di un certo Aa_i e può pertanto essere assunto uniforme. Dato un elemento Aa_i , e il corrispondente valore del vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$, consideriamo la quantità $A \cdot P(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} Aa$ dove con \mathbf{n} indichiamo un vettore unitario orientato come la normale esterna di Aa . Il numero $A \cdot P(\mathbf{F})$ prende il nome di *flusso uscente del vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso l'elementino d'area Aa* . Se ora ripetiamo l'operazione $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$ per tutti gli elementi in cui è stata divisa la superficie S ed eseguiamo la somma, facendo tendere contemporaneamente la superficie degli elementini Aa_i a zero, otteniamo un integrale superficiale della forma:

$$\Phi(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} da \quad (1.34)$$

che prende il nome di *flusso uscente del vettore \mathbf{F} attraverso la superficie S* . Se avessimo scelto per \mathbf{n} l'orientamento della normale interna avremmo parlato di *flusso entrante di $\mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso la stessa superficie*.

Nel caso che S sia una superficie aperta si prende come orientamento di \mathbf{n} quello di una vite che si avvolga secondo il verso in cui è orientato il bordo della superficie. (Fig. 1.2).

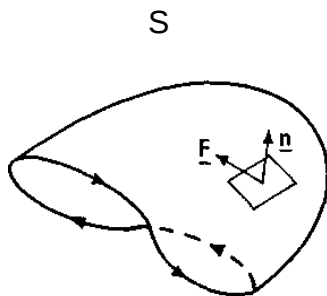


FIG. 1.2 - Definizione di normale esterna in un punto per una superficie aperta avente un contorno sul quale è stato scelto un verso di percorrenza.

Il concetto di flusso di un vettore ha avuto origine dall'idrodinamica. In questo caso il flusso rappresenta la massa di fluido che nell'unità di tempo attraversa una superficie e il campo vettoriale in questione è quello della velocità del fluido. Il concetto di flusso sarà utilizzato per introdurre un nuovo operatore che prende il nome di *divergenza*. Questo operatore indicato con div , è definito nel modo seguente:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\alpha \quad (1.35)$$

dove S è la superficie chiusa che delimita il volume V e $\mathbf{F}(x, y, z)$ è un campo vettoriale. La divergenza di un vettore è uno scalare e il suo valore in un dato punto è quello che si ottiene dal limite della (1.35) man mano che il volume V diminuisce sempre contenendo il punto.

La definizione data di divergenza è indipendente dal sistema di coordinate scelto. Poiché ci serviremo nella maggioranza dei casi di un sistema di coordinate cartesiane deriveremo ora la forma esplicita della divergenza in coordinate cartesiane. Come volume da utilizzare nella relazione (1.35) scegliamo un volume particolare e cioè il piccolo parallelogramma di lati Δx , Δy e Δz mostrato in Fig. 1.3. La scelta di un particolare volume non limita la validità del ragionamento come apparirà evidente alla fine della dimostrazione. Calcoliamo il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso la superficie del parallelepipedo. Poiché le facce del parallelepipedo sono normali ai tre assi cartesiani possiamo

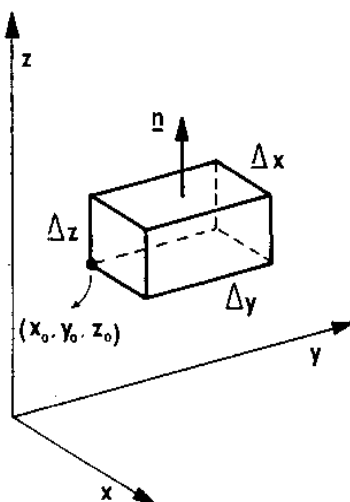


FIG. 1.3 - Parallelepipedo di lati Δx , Δy e Δz utilizzato per il calcolo della forma esplicita della divergenza del vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ in coordinate cartesiane.

limitarci a calcolare solo il flusso delle componenti di \mathbf{F} scelte in modo opportuno. Calcoliamo per esempio il flusso attraverso le due facce normali all'asse z ; è allora sufficiente considerare soltanto la componente $F_z(x, y, z)$.

Nel punto x_0, y_0, z_0 il valore del campo vettoriale sia $F(x_0, y_0, z_0)$: se trascuriamo termini di ordine superiore in $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ possiamo dire che al centro della faccia inferiore si ha:

$$F_z \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) = F_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F_z}{\partial x} \left| \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \left| \frac{\Delta y}{2} \right. \right|_{x_0, y_0, z_0} \quad (1.36)$$

e al centro di quella superiore:

Se assumiamo che le dimensioni del parallelepipedo siano
(1.37)

$$F_z \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \Delta z \right) = F_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F_z}{\partial x} \left| \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \left| \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right| \Delta z \right|_{x_0, y_0, z_0}.$$

abbastanza piccole da poter considerare uniformi nelle due facce i valori forniti dalla (1.36) e (1.37) avremo che il flusso di $\mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso queste due facce è:

$$\left[\frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta z \right] \Delta x \Delta y. \quad (1.38)$$

Per ottenere questo risultato si è tenuto conto del fatto che la normale uscente dalla faccia superiore è diretta in verso opposto alla normale uscente dalla faccia inferiore.

Ripetendo il ragionamento per le altre due coppie di superficie laterali si ottiene che:

$$\Phi[\mathbf{F}(x, y, z)] = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\alpha = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1.39)$$

Riprendendo in considerazione la relazione (1.35) è facile ricavare, dopo aver eseguito il limite per $V \rightarrow 0$, che:

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1.40)$$

Possiamo ora dimostrare un teorema relativo alla divergenza che sarà molto utile nello sviluppo degli argomenti dell'elettromagnetismo. Esiste una formula di calcolo integrale dovuta a Gauss dalla quale risulta che

$$\int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \, dv = \int_S f(x, y, z) \cos(n, x) \, d\alpha. \quad (1.41)$$

Questa formula ci permette di passare da un integrale esteso al volume V ad un integrale esteso alla superficie S che delimita V . Il termine $\cos(n, x)$ è il coseno direttore della normale uscente da S rispetto all'asse x . Evidentemente valgono formule analoghe anche per le derivate rispetto ad y e z :

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dv &= \int_S f(x, y, z) \cos(n, y) da ; \\ \int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dv &= \int_S f(x, y, z) \cos(n, z) da .\end{aligned}\quad (1.42)$$

Tenendo presenti le relazioni (1.41) e (1.42) possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv &= \int_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dv = \\ &= \int_S [F_x \cos(n, x) + F_y \cos(n, y) + F_z \cos(n, z)] da\end{aligned}\quad (1.43)$$

e da questa otteniamo il cosiddetto *teorema della divergenza*:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da . \quad (1.44)$$

Nel paragrafo 1.3 abbiamo detto che il numero di linee di forza AN che attraversano una piccola superficie Aa_0 ad esse perpendicolare, è proporzionale al modulo del vettore del campo applicato al centro dell'areola e cioè che: $AN = FAa_0$. È facile dimostrare che il flusso di un vettore attraverso una superficie è legato al numero di linee di forza che attraversano la superficie stessa. Prendendo in considerazione il flusso attraverso un elemento di superficie Aa , abbiamo :

$$\Delta\Phi(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a = F \cos \vartheta \Delta a = F \Delta a_0 = \Delta N \quad (1.45)$$

dove ϑ è l'angolo tra \mathbf{F} e \mathbf{n} , e $\Delta a_0 = \Delta a \cos \vartheta$ è la proiezione di Δa sul piano perpendicolare a \mathbf{F} . L'estensione ad una superficie S qualsiasi si ottiene considerando l'integrale della (1.45) su tutta la superficie.

Più in generale, data una superficie chiusa o aperta, potremo parlare di linee di forza uscenti o entranti rispetto alla superficie a seconda che l'orientamento della linea di forza sia concorde o discorde con la normale alla superficie scelta secondo le regole precedentemente esposte. Se assegnamo il segno negativo alle linee di forza entranti e il segno positivo alle linee di forza uscenti potremo dire che il numero di linee di forza che attraversano una superficie è la somma algebrica delle linee di forza entranti e di quelle uscenti.

Risulta allora evidente da quanto abbiamo detto e dalla (1.45), che il flusso di un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso una superficie chiusa è diverso da zero solo se entro la superficie sono contenute delle sorgenti del campo. Infatti solo in questo caso il numero di linee di forza entranti può essere diverso dal numero di linee di forza uscenti, e la loro somma algebrica diversa da zero. Questo è conseguenza del fatto che le linee di forza, o sono linee chiuse o sono linee che vanno da una sorgente positiva ad una negativa, o da una sorgente positiva all'infinito o dall'infinito ad una sorgente negativa. Quindi se una linea

di forza entra in una superficie chiusa all'interno della quale non esistono sorgenti negative, deve necessariamente uscire dalla superficie, dando così un contributo nullo alla relazione (1.45).

Consideriamo un punto dello spazio per il quale sia $\text{div } \mathbf{F} = 0$ ed un elemento di volume infinitesimo dV contenente il punto. Dalla relazione (1.44) ricaviamo che il flusso di $\mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso la superficie infinitesima dS , relativa al volume dV , è anch'esso nullo. Per le considerazioni sopra esposte sulla relazione tra flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa e sorgenti del campo sappiamo che in questo caso all'interno di dS non esistono sorgenti. Possiamo quindi concludere che per mezzo dell'operatore divergenza di un vettore è possibile determinare se esista una sorgente del campo vettoriale nel punto considerato.

Un campo vettoriale la cui divergenza è nulla in una regione dello spazio si dice *solenoidale* in quella regione. La divergenza di un vettore \mathbf{F} può anche essere indicata con la notazione $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

1.6 Il Rotore. Il Teorema di Stokes

Un altro operatore differenziale vettoriale di frequente uso è il *rotore*, che si indica con $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)$ o altrimenti con $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$ si definisce $\text{rot } \mathbf{F}$ un vettore la cui componente nella direzione del vettore unitario \mathbf{n} soddisfi la relazione:

$$\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.46)$$

dove \mathbf{n} è la normale alla superficie S il cui contorno C giace in un piano (perpendicolare ad \mathbf{n}) e viene percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore che guardi dalla punta del vettore \mathbf{n} . Come per la divergenza, anche per questo

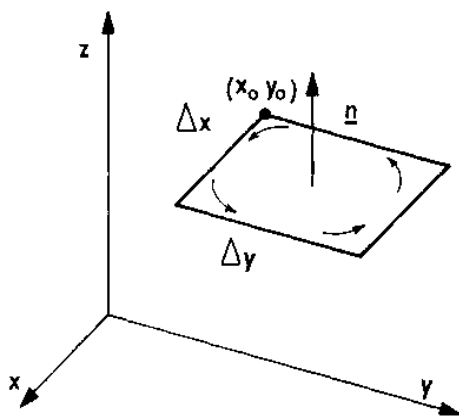
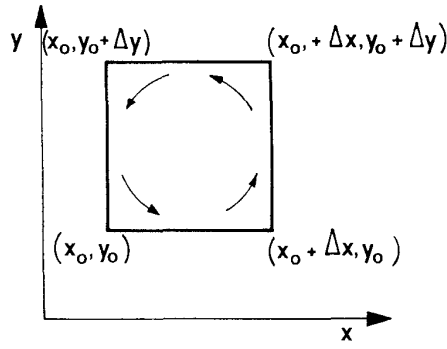


FIG. 1.4 - Elemento di superficie parallelo al piano $z = 0$.

FIG. 1.5 - Contorno orientato per il calcolo della circuitazione del vettore \mathbf{F}

caso la relazione (1.46) fornisce una definizione del tutto generale dell'operatore rotore dalla quale è possibile ricavare la forma del rotore nei vari sistemi di coordinate.

Per ottenere la forma del rotore in coordinate cartesiane consideriamo l'elemento di superficie mostrato in Fig. 1.4. In questo caso particolare la direzione del versore \mathbf{n} coincide con quella dell'asse z e il calcolo fornisce quindi la componente del rotore di $\mathbf{F}(x, y, z)$ in questa direzione. Se eseguiamo l'integrale contenuto nella relazione (1.46) lungo il contorno della superficie di Fig. 1.4 vediamo che a questo integrale lungo i tratti paralleli all'asse x contribuisce soltanto la componente F_x e lungo i tratti paralleli all'asse y soltanto la componente F_y .

Assumiamo che sia noto il valore del campo nel punto (x_0, y_0) di Fig. 1.5 e che si possa considerare il valore delle componenti di $\mathbf{F}(x, y)$ nel punto mediano di ogni lato come valor medio. Utilizzando uno sviluppo di Taylor intorno al punto (x_0, y_0) , arrestato al primo ordine, potremo dire che la componente F_x ha nel punto di mezzo del lato inferiore parallelo all'asse x il valore :

$$F_x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 \right) = F_x(x_0, y_0) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (1.47a)$$

e nel punto di mezzo del lato superiore parallelo all'asse x il valore:

$$F_x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \Delta y \right) = F_x(x_0, y_0) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y. \quad (1.47b)$$

Per il valore della componente F_y lungo i lati paralleli all'asse y , con un ragionamento analogo, possiamo ricavare che:

$$F_y \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) = F_y(x_0, y_0) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \quad (1.48)$$

$$F_y \left(x_0 + \Delta x, y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) = F_y(x_0, y_0) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x.$$

Mediante le relazioni (1.47) e (1.48) è ora possibile calcolare l'integrale della (1.46), ottenendo per la componente del rotore:

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)]_z &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \left\{ \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + \right. \\ &\quad \left. - \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta y \right\} = \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Poiché abbiamo scelto $S = \Delta x \Delta y$ la (1.49) diviene:

$$[\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)]_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \quad (1.50)$$

Per ottenere le componenti x e y del rotore basta prendere il versore \mathbf{n} orientato secondo l'asse x o l'asse y . Nel primo caso, per un elemento di superficie $\Delta y \Delta z$, si ottiene:

$$[\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)]_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (1.51)$$

e nel secondo caso per un elemento di superficie $\Delta x \Delta z$:

$$[\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)]_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}. \quad (1.52)$$

(1.52)

L'espressione completa del rotore in coordinate cartesiane è

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (1.53)$$

Una maniera semplice per ricordare la relazione (1.53) è quella di calcolare formalmente il determinante della matrice al secondo membro della seguente relazione:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.54)$$

L'espressione ottenuta per il rotore in coordinate cartesiane, anche se ricavata utilizzando delle superficie estremamente particolari, ha validità generale.

Infatti una superficie qualsiasi può essere rappresentata mediante elementi superficiali del tipo di quelli usati nella dimostrazione tenendo conto che i contributi agli integrali di linea dovuti ai tratti in comune tra i contorni di due superficie adiacenti si annullano.

Per l'operatore vettoriale rotore vale il *teorema di Stokes*:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (1.55)$$

che stabilisce una relazione tra la circuitazione del vettore \mathbf{F} lungo una linea C e il flusso del $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ attraverso una qualunque superficie S delimitata da C .

Per la dimostrazione, data la curva C , consideriamo una superficie S che abbia C come contorno. Suddividiamo S in un numero abbastanza grande di aree elementari ΔS_i . Ognuna di queste aree sarà limitata da una curva C_i ; calcoleremo la circuitazione del vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ sulle C_i percorrendo sempre lo stesso verso.

La somma delle circuitazioni eseguite su tutti i contorni dà :

$$\sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.56)$$

dato che i contributi dovuti ai tratti in comune tra due aree adiacenti si annullano. Facendo tendere a zero la superficie delle aree ΔS_i si ottiene:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \left[\frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \right] \Delta S_i \quad (1.57)$$

Ricordando la relazione (1.46) possiamo trasformare la (1.57) nella forma:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i [\mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_i] \Delta S_i \quad (1.58)$$

dove \mathbf{n}_i è il vettore unitario perpendicolare alle superficie elementari ΔS_i e l'indicazione di limite è rimasta perché nella (1.57) era estesa a tutta l'espressione e non solo alla quantità tra parentesi. Ma il termine a destra della (1.58) non è altro che l'integrale di superficie esteso ad S e pertanto:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (1.59)$$

1.7 Operatori vettoriali del secondo ordine

Si definisce *operatore* ogni simbolo che posto davanti ad uno scalare o ad un vettore lo trasformi in un altro scalare o vettore. Per esempio il simbolo gradiente è un operatore che trasforma uno scalare in un vettore e il simbolo

divergenza è un operatore che trasforma un vettore in uno scalare. Nel caso di alcuni campi vettoriali e scalari è possibile applicare successivamente gli operatori che abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti.

Consideriamo il gradiente di un campo scalare $\varphi(x, y, z)$. Il risultato di questa operazione fornisce un campo vettoriale al quale possiamo applicare l'operatore divergenza.

L'operatore div grad , spesso indicato anche con il simbolo ∇^2 , prende il nome di *operatore di Laplace o Laplaciano* e in coordinate cartesiane assume la forma :

$$\text{div grad } \varphi(x, y, z) = \nabla^2 \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.60)$$

Ricordando la relazione (1.54) è facile dimostrare una importante proprietà del rotore e cioè che il rotore del gradiente di un campo scalare è nullo. Infatti:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \varphi(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Un campo vettoriale il cui rotore sia nullo viene indicato con il nome di *campo irrotazionale*.

Il risultato della (1.61), come si può dimostrare, è invertibile; vale a dire se un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$, in una certa regione dello spazio, è tale che $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = 0$, allora esiste certamente un campo scalare $\varphi(x, y, z)$ ¹⁾, di cui $\mathbf{F}(x, y, z)$ è il gradiente. Quindi $\mathbf{F}(x, y, z)$ è un campo conservativo. Pertanto le definizioni di campo conservativo e campo irrotazionale si equivalgono così come le relazioni

$$\mathbf{F} = \text{grad } \varphi \qquad \text{rot } \mathbf{F} = 0.$$

È facile vedere inoltre dal teorema di Stokes (1.55) che se il campo vettoriale è irrotazionale allora la sua circuitazione è nulla. Un'altra interessante proprietà del rotore di un campo vettoriale è che la sua divergenza è nulla. Infatti:

$$\text{div rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (1.62)$$

¹⁾ Più esattamente possiamo dire che se \mathbf{F} è un campo irrotazionale esiste una funzione scalare φ , definita a meno di una costante additiva, di cui \mathbf{F} è il gradiente. Se inoltre la regione dello spazio in cui $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ è semplicemente connessa allora la funzione $\varphi(x, y, z)$ è ad un solo valore.

Eseguendo le operazioni di derivazione e semplificando si trova:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = 0. \quad (1.62)$$

Vogliamo infine riportare un'importante relazione che lega fra di loro vari operatori applicati a un vettore \mathbf{F} , e cioè

$$(1.63) \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$$

dove il laplaciano del vettore \mathbf{F} è un vettore che ha per componenti cartesiane i laplaciani delle componenti cartesiane del vettore. La validità di tale relazione può essere facilmente verificata esprimendo i vettori che compaiono ai due membri tramite le loro componenti cartesiane.

Nella Tabella 1.1 sono riportate alcune formule relative all'applicazione degli operatori a semplici operazioni di addizione e moltiplicazione di scalari o vettori.

Tabella 1.1.

$$\begin{aligned} \nabla (\varphi_1 + \varphi_2) &= \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2 \\ \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) &= \nabla \cdot \mathbf{F}_1 + \nabla \cdot \mathbf{F}_2 \\ \nabla \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) &= \nabla \times \mathbf{F}_1 + \nabla \times \mathbf{F}_2 \\ \nabla \times \varphi_1 \varphi_2 &= \varphi_2 \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_2 \\ \nabla (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) &= (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla) \mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla) \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times \nabla \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2 \times \nabla \times \mathbf{F}_1 \\ \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) &= \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2 \\ \nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) &= \mathbf{F}_1 \nabla \cdot \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2 \nabla \cdot \mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla) \mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla) \mathbf{F}_2 \\ \nabla \cdot \varphi \mathbf{F} &= \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi \\ \nabla \times \varphi \mathbf{F} &= \varphi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \varphi \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

Nella Tabella 1.2 sono invece riportate le forme esplicite degli operatori in coordinate cilindriche e sferiche.

Tabella 1.2.

| Operatore | Coordinate Cilindriche (r, ϕ, z) | Coordinate Polari Sferiche (r, ϑ, ϕ) |
|---|---|---|
| Gradiente $\nabla \varphi$ | $(\nabla \varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ | $(\nabla \varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ |
| | $(\nabla \varphi)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$ | $(\nabla \varphi)_\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$ |
| | $(\nabla \varphi)_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ | $(\nabla \varphi)_\phi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$ |
| Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{F}$ | $\frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta F_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$ |
| Rotore $\nabla \times \mathbf{F}$ | $(\nabla \times \mathbf{F})_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right)$ | $(\nabla \times \mathbf{F})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial (\sin \vartheta F_\phi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \phi} \right)$ |
| | $(\nabla \times \mathbf{F})_\phi = \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right)$ | $(\nabla \times \mathbf{F})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r}$ |
| | $(\nabla \times \mathbf{F})_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right)$ | $(\nabla \times \mathbf{F})_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \phi} \right)$ |
| Laplaciano $\nabla^2 \varphi$ | $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$ |

2

Elettrostatica di sistemi di cariche nel vuoto

Il nome elettricità deriva dal termine greco « electron » con cui veniva indicata l'ambra. I Greci ed altri popoli dell'antichità furono senz'altro a conoscenza dei fenomeni elettrici e compirono alcune osservazioni sui corpi elettrizzati senza superare mai tuttavia un livello puramente empirico.

Per trovare i primi studi sistematici di elettrologia bisogna arrivare all'inizio del XVIII secolo. In questo periodo le principali teorie sviluppate consideravano i fenomeni elettrici come dovuti alla presenza di uno o due fluidi all'interno dei corpi. Questi due tipi di fluidi venivano chiamati *resinoso* e *vetroso*, a seconda del tipo di materiale che, una volta elettrizzato per strofinio, mostrava di assumere una delle due proprietà possibili, e le caratteristiche elettriche dipendevano dall'eccesso in un corpo di uno o dell'altro dei due fluidi. Un contributo, che trasformò l'elettrologia da pura ricerca empirica a scienza, fu quello dovuto a Charles Augustin de Coulomb che nella seconda metà del XVIII secolo dimostrò come le azioni tra due cariche fossero di tipo analogo a quello delle forze newtoniane esercitantesi fra masse materiali, facendo sì che l'elettrologia potesse avvalersi del formalismo che la meccanica razionale aveva sviluppato per la teoria di Newton sulla gravitazione universale. Ma il passo decisivo, verso quella che oggi viene indicata come la teoria classica dell'elettromagnetismo e che rappresenta tuttora uno dei più validi strumenti di indagine in nostro possesso, fu compiuto verso la metà dell'ottocento con i lavori di Michael Faraday e di James Clark Maxwell. Dapprima in maniera semplicistica e intuitiva da Faraday e poi in maniera rigorosamente matematica da Maxwell fu introdotto il concetto di campo elettromagnetico.

La teoria della azione a distanza, che fino ad allora era alla base dell'interpretazione

degli effetti elettrici, veniva così sostituita da una teoria che, mediante l'introduzione del concetto di campo, attribuiva allo spazio, perturbato dalla presenza di una carica, la proprietà di esercitare una azione su una seconda carica.

Non si può inoltre dimenticare che la completa descrizione matematica dei fenomeni elettromagnetici e la scoperta, anch'essa compiuta da Maxwell, che le onde luminose sono onde elettromagnetiche, risultarono tra i più importanti punti di partenza dai quali Lorentz ed Einstein presero il via per il superamento della crisi della teoria classica della fisica mediante la formulazione della teoria della relatività. A merito di Maxwell va detto che anche alla luce della teoria relativistica il sistema di equazioni da lui elaborato come sintesi di tutto il suo lavoro continua a mantenere piena validità.

Gli ulteriori sviluppi della fisica, e precisamente lo studio della natura e delle interazioni delle particelle elementari, hanno portato i fisici a riprendere in esame l'aspetto discontinuo della materia. Da queste ricerche è nata e si è sviluppata la teoria quantistica dei campi, per mezzo della quale sono stati interpretati gran parte dei fenomeni verificantisi su scala atomica e nucleare. Ma anche in questo caso, pur essendo necessario tener conto degli effetti tipicamente quantistici, l'esperienza prova che, ad esempio, la legge di Coulomb che regola l'interazione fra due cariche continua a fornire una corretta descrizione di tale interazione anche all'interno di molecole e di atomi e soltanto per distanze inferiori ai 10^{-13} cm si è constatato che essa cessa di valere.

A partire dal prossimo paragrafo, e via via attraverso tutti i capitoli che seguiranno, cercheremo di dare un'idea più completa possibile, seppure elementare, della teoria classica dell'elettromagnetismo mettendone in luce di volta in volta, a seconda del tipo del fenomeno, gli aspetti macroscopici o quelli microscopici.

2.1 La carica elettrica

Nell'introdurre i concetti dell'elettrostatica non ci dilungheremo sui vari esperimenti che hanno portato alla scoperta della carica elettrica e della natura elettrica della materia.

Dagli studi compiuti sulla natura della materia sappiamo che esistono cariche di due tipi diversi, che indichiamo con i nomi di carica positiva e carica negativa, e che esse sono le responsabili di tutti i fenomeni di elettrizzazione della materia. Tutte le particelle elementari cariche finora trovate in natura confermano l'esistenza di due soli tipi di cariche.

Sappiamo inoltre che la materia è costituita da un numero estremamente grande di atomi e molecole, a loro volta formati da particelle elementari: elettroni, protoni e neutroni. Gli elettroni sono particelle cariche negativamente (per convenzione la loro carica è indicata col simbolo $-e$) che hanno una massa di $0,911 \cdot 10^{-27}$ g; i protoni sono particelle di massa 1836 volte maggiore di quella dell'elettrone e di carica opposta $+e$; i neutroni sono particelle di massa circa uguale a quella dei protoni ma che non hanno carica elettrica.

Esperienze molto raffinate tendenti a misurare possibili differenze tra la quantità di carica dell'elettrone e del protone non hanno finora avuto successo. Dobbiamo pertanto ritenere che le cariche dell'elettrone e del protone, a parte il segno, siano perfettamente uguali.

Un atomo è costituito da un nucleo centrale di diametro dell'ordine di 10^{-3} - 10^{-12} cm, formato da protoni e neutroni, tenuti insieme da forze, agenti su distanze molto piccole, chiamate forze nucleari. Gli elettroni si muovono intorno al nucleo su orbite di diametro dell'ordine di 10^{-8} cm, distanza che rappresenta le dimensioni dell'atomo, e sono legati ad esso da forze di natura elettrica. Se riuscissimo a ingrandire un atomo di idrogeno fino a fargli assumere dimensioni dell'ordine di 1 chilometro troveremmo che, a parità di ingrandimento, il nucleo, formato in questo caso da un solo protone, avrebbe dimensioni dell'ordine di 1 centimetro. Questo può servire a dare un'idea del fatto che in un atomo la materia occupa una percentuale estremamente piccola del volume totale.

Un atomo in condizioni normali possiede lo stesso numero di elettroni e di protoni ed è quindi elettricamente neutro. Tale numero, indicato come numero atomico Z, caratterizza le proprietà chimiche di ogni atomo. Il numero di neutroni contenuti nel nucleo può essere uguale o maggiore a quello dei protoni. La massa dell'atomo, concentrata nel nucleo, è determinata dal numero totale di neutroni e protoni, indicato come numero di massa A. Un dato atomo può esistere in diverse forme stabili costituite da nuclei con lo stesso numero di protoni e differente numero di neutroni. Tali atomi vengono chiamati isotopi.

È stato stabilito, con esperienze molto accurate, che *la carica e dell'elettrone è la più piccola carica esistente in natura e che tutte le altre cariche sono multipli interi di e.*

Alla luce di quanto abbiamo detto ogni corpo contiene normalmente un numero estremamente grande di cariche positive e negative ma globalmente è neutro, cioè il numero di cariche positive è uguale a quello delle cariche negative. Un corpo è carico positivamente o negativamente quando possiede un eccesso rispettivamente di protoni o di elettroni. Gli effetti di elettrizzazione sono pertanto interpretabili tenendo conto della natura elettrica della materia.

Per un sistema isolato, inteso come un sistema che non possa scambiare cariche con l'esterno, si può enunciare una legge di conservazione: *la quantità di carica posseduta dal sistema, cioè l'eccesso di carica, è costante.*

Questo teorema mantiene la sua validità anche se prendiamo in considerazione effetti di trasformazione di energia in materia come quelli che avvengono nella produzione di una coppia elettrone-positone ¹⁾ da parte di un fotone. In questo caso il fotone che scompare crea una carica positiva e una carica negativa senza tuttavia contribuire a variare l'eccesso di carica di un dato segno posseduta dal sistema.

¹⁾ Il positone è una particella elementare con massa uguale a quella dell'elettrone e carica uguale ed opposta.

2.2 La legge di Coulomb

Fondamento dell'elettrostatica è la legge di Coulomb riguardante la forza che si esercita tra due cariche, di piccole dimensioni rispetto alla reciproca distanza, fisse in due punti dello spazio. Essa stabilisce che questa forza:

- a) è proporzionale al prodotto delle cariche;
- b) è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza;
- c) è diretta lungo la retta che congiunge le due cariche;
- d) è attrattiva se le cariche sono di segno opposto e repulsiva se le cariche hanno lo stesso segno.

Se indichiamo con \mathbf{F}_1 la forza esercitata dalla seconda carica sulla prima e con \mathbf{r}_{12} il vettore orientato dalla seconda carica alla prima e avente come modulo la distanza fra le due, la legge di Coulomb è:

$$\mathbf{F}_1 = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.1)$$

dove K è una costante di proporzionalità che dipende dal sistema di unità di misura utilizzato.

Questa legge è stata determinata sperimentalmente da Coulomb utilizzando una bilancia di torsione con un procedimento concettualmente simile a quello usato per la misura della forza di attrazione gravitazionale fra due masse.

Il dominio di validità di questa legge si estende dalle piccole distanze, dell'ordine di 10^{-13} cm, al di sotto delle quali l'interazione coulombiana è alterata da altre forze che si esercitano fra le particelle elementari e dagli effetti quantistici, fino alle grandi distanze. In effetti non vi sono prove sperimentali che la legge di Coulomb non sia valida anche su distanze di molti chilometri, e inoltre la teoria quantistica dell'elettromagnetismo, che penetra più profondamente la natura dei fenomeni, ci fornisce argomenti per ritenere che questa legge rimanga inalterata anche per distanze di tipo astronomico. La dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza tra le due cariche, dapprima verificata da Cavendish con una precisione di 1 parte su 50, è stata successivamente verificata con una precisione di una parte su 10^9 ¹⁾.

Nella legge (2.1) le unità di misura per quanto riguarda la forza e la distanza sono quelle usate in meccanica; è necessario determinare il valore della costante K e l'unità di misura per la carica elettrica. Un possibile sistema consiste nel porre K uguale ad uno e nello scegliere l'unità di carica come la carica che posta nel vuoto ad una distanza unitaria da una carica uguale od opposta la respinge o l'attrae con una forza unitaria. Nel sistema c.g.s. la carica unitaria è perciò quella che posta nel vuoto alla distanza di un centimetro da una carica uguale la respinge con una forza di 1 dine. Pertanto in questo sistema di misura, che chiameremo c.g.s. elettrostatico, la carica elettrica risulta avere la dimensione di:

$$[q] = [m l t^{-2} l^2]^{1/2}$$

¹⁾ S.J. Plimpton e W. E. Lawton - Phys. Rev. 50, 1066 (1936).

e non è necessario introdurre una nuova unità di misura. La carica elementare viene ad assumere il valore di $4,801 \cdot 10^{-10}$ unità elettrostatiche (u.e.s.).

Un altro procedimento possibile consiste nel definire a priori una unità di misura per la carica elettrica. Nel sistema ideato da Giorgi nel 1901 viene introdotta accanto alle unità di misura fondamentali della meccanica: metro, chilogrammo, secondo, (MKS), l'unità di carica chiamata coulomb. In analogia con quanto si fa per esempio per la lunghezza si stabilisce un campione di carica definito come la quantità di carica che passando in un voltmetro a nitrato di argento separa 0,00111800 g di argento. In questo sistema si ottiene:

$$K = 8,9874 \cdot 10^9 \frac{\text{newton} \cdot \text{m}^2}{\text{coulomb}^2}.$$

È stato inoltre introdotto il cosiddetto sistema M.K.S.Q. razionalizzato o sistema Giorgi razionalizzato. In questo sistema si pone $K = 1/4\pi\epsilon_0$, da cui si ottiene:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{coulomb}^2}{\text{newton} \cdot \text{m}^2}.$$

La costante ϵ_0 è nota come *permittività* o *costante dielettrica* del vuoto. La legge di Coulomb assume allora la forma

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (2.2)$$

La carica elementare e nel sistema M.K.S.Q. assume il valore di $1,602 \cdot 10^{-19}$ coulomb. In questo volume adotteremo il sistema di unità di misura M.K.S.Q. razionalizzato.

2.3 Principio di sovrapposizione e distribuzione di cariche

La formula (2.1) esprime l'interazione tra due cariche isolate nello spazio. Sorge il problema di stabilire se tale relazione resti valida nel caso in cui siano presenti altre cariche. L'esperienza dimostra che la forza che si esercita tra una coppia di cariche è indipendente dalla presenza di altre cariche. Si può pertanto dire che per la interazione coulombiana tra cariche elettriche vale il principio di sovrapposizione. Se si considera quindi un sistema di N cariche puntiformi, la forza che si esercita sulla i -esima carica è data dalla somma vettoriale delle forze che ogni singola carica eserciterebbe sulla i -esima in assenza di tutte le altre, cioè:

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j=1, \dots, N, j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}. \quad (2.3)$$

Il concetto di carica puntiforme, che abbiamo finora utilizzato per introdurre le interazioni elettrostatiche, è, se si vuole, giustificato dalla esistenza di cariche

elementari di dimensioni estremamente piccole, quali l'elettrone e il protone, rispetto alle distanze alle quali si considera la loro interazione. Nei fenomeni che avvengono a livello macroscopico è sempre implicato un numero estremamente grande di cariche elementari ed è perciò utile introdurre il concetto di distribuzione continua di carica. In tale rappresentazione si trascura la natura quantizzata della carica per introdurre un valore medio effettuato o su un elemento di superficie o su un elemento di volume. Si definiscono così una *densità volumetrica*:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (2.4)$$

e una *densità superficiale*:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (2.5)$$

dove Δq rappresenta la somma delle cariche elementari contenute rispettivamente nel volume ΔV o distribuite sulla superficie ΔS .

Possiamo ora considerare la forza esercitata su una carica puntiforme da un sistema di N cariche puntiformi, da un corpo di volume V , con una distribuzione di carica volumetrica, e da un corpo di superficie S , con una distribuzione di carica superficiale.

La forza totale sulla carica q è data da:

$$\mathbf{F}_q = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2.6)$$

dove \mathbf{r} caratterizza, rispetto ad un punto origine arbitrario O , la posizione del punto ove è posta la carica q , \mathbf{r}_i la posizione della i -esima fra le N cariche puntiformi, \mathbf{r}' quella di un punto generico della distribuzione continua di carica.

2.4 Il campo elettrico

Consideriamo la forza che una carica q , che chiameremo sorgente, esercita su una carica q_0 , che chiameremo di prova, posta in un punto dello spazio ad una distanza \mathbf{r} dalla posizione della carica q :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^3} \mathbf{r}.$$

Possiamo introdurre un nuovo campo vettoriale, legato al primo, definito come:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \quad (2.7)$$

Questo campo vettoriale prende il nome di *campo elettrico* e rappresenta la forza esercitata dalla carica q su una carica unitaria.

Dalla espressione della forza di Coulomb si ricava così che il campo elettrico generato da una carica puntiforme in un punto P dello spazio, la cui posizione è caratterizzata dal vettore \mathbf{r} staccato a partire dal punto O ove è posta la carica generante il campo, è dato da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} . \quad (2.8)$$

(2.8)

Allo stesso modo tenendo conto della (2.6) possiamo definire la forza per unità di carica prodotta dalla più generale distribuzione di cariche:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA' . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Il campo vettoriale così introdotto risulta essere, in ogni punto dello spazio, una funzione del punto stesso e della posizione ed intensità delle sorgenti, ed è quindi indipendente dalla carica di prova.

Una tale definizione, che è stata introdotta in maniera puramente matematica, va tuttavia considerata con particolare cautela da un punto di vista sperimentale. Consideriamo un sistema di cariche sorgenti qualsiasi e misuriamo in ogni punto dello spazio la forza che esso esercita su una carica di prova q_0 . Bisogna tener conto infatti che la carica di prova produce una perturbazione sul sistema di cariche sorgenti e pertanto, se eseguiamo l'esperienza sopraddetta, troveremo un valore del rapporto tra la forza e la carica di prova dipendente dalla carica di prova stessa. Si potrebbe ovviare a questo inconveniente nella definizione operativa del campo elettrico utilizzando cariche di prova via via più piccole fino a ridurre al minimo l'effetto sulle cariche sorgenti. Tuttavia non è possibile giungere al limite di carica nulla a causa della natura discreta della carica e quindi esisterà sempre una perturbazione per quanto piccola.

L'introduzione del concetto di campo elettrico permette di associare ad ogni punto dello spazio una nuova *proprietà* che non dipende dalla presenza di una carica di prova. Possiamo pertanto dire che un sistema di cariche produce in tutto lo spazio circostante una *modificazione* cui diamo il nome di *campo elettrico* e per calcolare il quale utilizziamo la relazione (2.9). Se ora poniamo una carica q in un punto dello spazio dove esiste un campo elettrico \mathbf{E} possiamo dire che su di essa agisce una forza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$.

Questo procedimento ci permette di descrivere i fenomeni elettrostatici non più parlando in termini di interazioni tra sorgenti e carica di prova ma tra un campo e carica di prova.

Ricordando quanto detto nel paragrafo 1.3 possiamo dire che il campo elettrico è un campo vettoriale che ha come sorgenti le cariche elettriche.

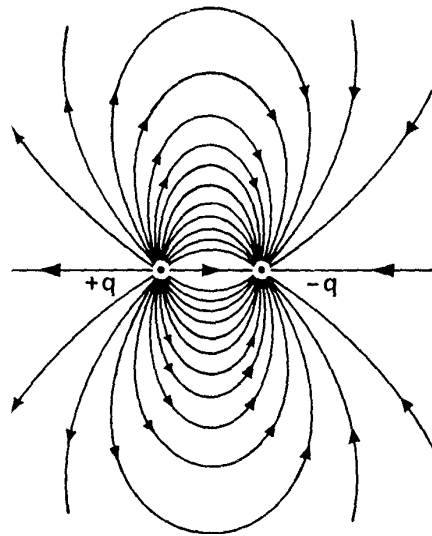


FIG. 2.1 a) - Linee di forza del campo elettrico prodotto da due cariche puntiformi uguali in modulo e di segno opposto.

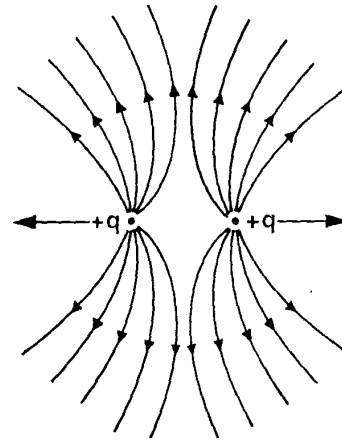


FIG. 2.1 b) - Linee di forza del campo elettrico prodotto da due cariche puntiformi uguali.

Per convenzione le linee di forza generate da una carica puntiforme positiva nel vuoto sono delle linee radiali orientate nel verso uscente dalla carica, mentre quelle generate da una carica negativa hanno verso entrante nella carica. Poiché la forza che agisce su una carica è $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ risulta che una carica positiva posta in un campo elettrico si sposterà nello stesso verso del campo elettrico, mentre una carica negativa si sposterà in verso opposto. In Fig. 2.1 (a) e (b) sono mostrate in sezione, rispettivamente le linee di forza generate da due cariche di segno opposto (a) e di uguale segno (b). Dato che il campo elettrico è univocamente determinato in ogni punto dello spazio le sue linee di forza non possono mai intersecarsi e sono delle curve continue in ogni regione che non contenga cariche: esse iniziano e finiscono solo su cariche elettriche o all'infinito.

Inoltre secondo questa rappresentazione grafica una maggiore densità di linee di forza in una piccola regione dello spazio attorno a un punto indica che in tale regione il campo elettrico è più elevato. Si vede, ad esempio, che in Fig. 2.1 (b) il punto di simmetria tra le due cariche è un punto dove il campo elettrico è nullo.

2.5 Il potenziale elettrico

Consideriamo una regione dello spazio dove esista un campo elettrico \mathbf{E} e una carica positiva puntiforme unitaria. La forza elettrica coulombiana per spostare questa carica di un tratto $d\mathbf{l}$ compierà un lavoro dato da:

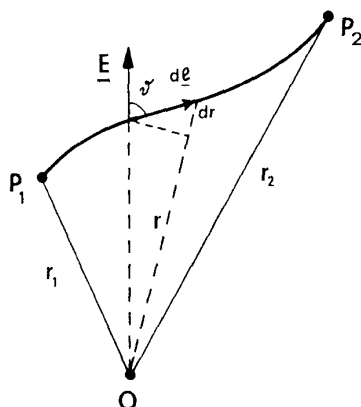


FIG. 2.2 - Il lavoro compiuto contro le forze del campo elettrico per portare una carica puntiforme positiva da P_1 a P_2 non dipende dal cammino percorso.

$$dL_{el} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Il lavoro compiuto da una forza meccanica per spostare contro le forze del campo la stessa carica per lo stesso tratto $d\mathbf{l}$ sarà $dL = -dL_{el}$. Consideriamo ora uno spostamento finito da un punto P_1 ad un punto P_2 lungo una certa linea C . Il lavoro compiuto contro le forze del campo sarà:

$$L = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (2.10)$$

Se supponiamo che il campo elettrico sia generato da una carica puntiforme positiva q la (2.10) assume la forma:

$$L = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} . \quad (2.11)$$

Come si vede dalla Fig. 2.2, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $d\mathbf{l}$, abbiamo che $dr = dl \cos \vartheta$ e quindi:

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r dl \cos \vartheta = r dr \quad (2.12)$$

E l'integrale (2.11) assume la forma:

$$(2.13)$$

$$L = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) .$$

) risulta quindi che il lavoro fatto dipende solamente dai punti iniziale e finale e non dal particolare cammino percorso.

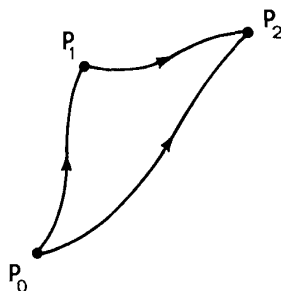


FIG. 2.3 - Il campo elettrico è un campo vettoriale con circuitazione nulla.

Consideriamo ora un punto di riferimento P_0 e due punti P_1 e P_2 come in Fig. 2.3, chiamiamo con $\varphi(P_1)$ il lavoro fatto contro le forze del campo lungo un percorso da P_0 a P_1 e con $\varphi(P_2)$ il lavoro fatto contro le forze del campo lungo un percorso da P_0 a P_2 . È immediato vedere che il lavoro fatto per uno spostamento da P_1 a P_2 è uguale a $\varphi(P_2) - \varphi(P_1)$ e questo è un risultato che non dipende dalla particolare scelta del punto P_0 di riferimento. Chiameremo la funzione scalare $\varphi(P)$ *potenziale elettrostatico* del punto P ; porremo cioè:

$$\varphi(P) = \varphi(\mathbf{r}) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (2.14)$$

La funzione $\varphi(P)$ definita dalla (2.14) risulta determinata a meno di una costante addittiva e cioè a meno del valore da essa assunto nel punto P_0 .

Per convenienza si prende il punto di riferimento P_0 all'infinito, il che equivale a porre la costante addittiva uguale a zero e a scegliere una funzione potenziale tendente a zero per r tendente all'infinito.

Sostituendo nella (2.14) ad \mathbf{E} l'espressione del campo prodotto da una carica puntiforme q si ha come risultato della integrazione

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} . \quad (2.15)$$

In definitiva la (2.13), tramite la (2.15), può essere scritta nella forma:

$$L = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) . \quad (2.16)$$

Questa espressione mostra che il lavoro per portare una carica puntiforme positiva unitaria dal punto \mathbf{r}_1 al punto \mathbf{r}_2 è data dalla differenza di potenziale esistente tra i due punti. In particolare possiamo dire che il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ in un punto rappresenta il lavoro fatto contro la forza del campo per portare la carica positiva unitaria dall'infinito al punto \mathbf{r} .

La differenza di potenziale $d\varphi$ tra due punti distanti $d\mathbf{l}$ è per la (2.14)

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.17)$$

che in coordinate ortogonali cartesiane si scrive:

$$d\varphi = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (2.18)$$

Ricordando la (1.25) si ottiene che:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\mathbf{grad} \varphi(x, y, z). \quad (2.19)$$

Pertanto il campo elettrico è un campo vettoriale che può essere rappresentato come gradiente di una funzione scalare ed è quindi un campo conservativo. Da questo deriva che se consideriamo un percorso chiuso C

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C -\mathbf{grad} \varphi \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.20)$$

cioè il campo elettrico è un vettore a circuitazione nulla. Questa caratteristica del campo si esprime anche dicendo che il campo elettrico è un campo vettoriale irrotazionale :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{rot} \mathbf{grad} \varphi = 0 \quad (2.21)$$

Nel caso più generale di una distribuzione di cariche puntiformi, superficiali e volumetriche il potenziale elettrostatico in un punto \mathbf{r} dello spazio è:

Eseguendo il

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.22)$$

gradiente della (2.22) cambiato di segno si ritrova l'espressione del campo elettrico data dalla (2.9). Confrontando le espressioni del potenziale e del campo elettrico si vede che per ottenere il campo elettrico bisogna eseguire tre sommatorie o tre integrali per ciascun termine mentre per calcolare il potenziale è sufficiente una operazione. Inoltre il calcolo dell'integrale è più semplice nel caso in cui si consideri il potenziale. La differenziazione, che è necessaria per passare dal potenziale al campo elettrico, è una operazione che presenta minore difficoltà di una integrazione.

Le superficie luogo dei punti dello spazio sulle quali la funzione potenziale $\varphi(x, y, z)$ assume valore costante, sono dette *superficie equipotenziali*. Poiché la funzione potenziale è univocamente determinata, per ogni punto dello spazio passa una ed una sola superficie equipotenziale. In Fig. 2.4 sono mostrate tratteggiate le superficie equipotenziali di un sistema di due cariche puntiformi $-q$ e $+q$.

Ricordando quanto detto nel paragrafo 1.2 e la relazione $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi$ è ovvio che il vettore elettrico è in ogni punto perpendicolare alla superficie equipotenziale passante per quel punto. Inoltre il verso delle linee di forza di \mathbf{E} è quello che va dai punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore.

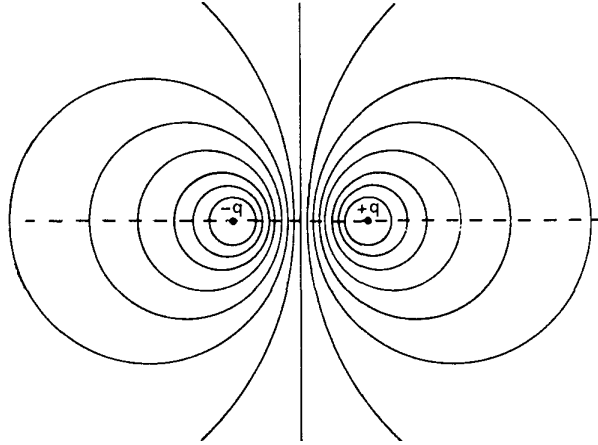


FIG. 2.4 - Intersezione delle superficie equipotenziali generate da due cariche di modulo uguale e di segno opposto con un piano contenente le due cariche.

Dalla relazione (2.16) possiamo ricavare le dimensioni del potenziale o della differenza di potenziale

$$[\varphi] = \frac{\text{lavoro}}{\text{carica}} .$$

(2.23)

Nel sistema M.K.S.Q. il potenziale si misura in joule/coulomb e a questa unità è stato dato il nome di volt. Diremo quindi che tra due punti P_1 e P_2 esiste una differenza di potenziale di un volt se il lavoro che le forze del campo devono compiere per spostare una carica positiva di un coulomb tra P_1 e P_2 è di un joule. Tenendo conto della relazione (2.19) si vede che le dimensioni del campo elettrico sono quelle di una differenza di potenziale diviso una lunghezza.

Nel sistema M.K.S.Q. l'unità di misura del campo elettrico è il volt/metro o anche newton/coulomb.

2.6 Energia potenziale di un sistema di cariche

Consideriamo una carica positiva q_1 posta in un punto P_1 dello spazio e il lavoro necessario per portare un'altra carica q_2 dall'infinito in un punto P_2 posto a distanza r_{12} da P_1 . Per la relazione (2.2) il lavoro sarà quello compiuto da una forza \mathbf{F}_0 tale che:

$$L = \int_{\infty}^{P_2} \mathbf{F}_0 \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{P_2} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} , \quad (2.24)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la forza meccanica \mathbf{F}_0 , in ogni spostamento infinitesimo $d\mathbf{l}$, è uguale e contraria alla forza elettrostatica $q_2 \mathbf{E}$, dove \mathbf{E} è il campo elettrico generato dalla carica q_1 .

Utilizzando la (2.12) si ottiene:

$$L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}. \quad (2.25)$$

Questo risultato evidentemente è indipendente dal particolare cammino percorso per portare la carica q_2 dall'infinito al punto P_2 .

Per creare un sistema di due cariche, come quello ora introdotto, è quindi necessario spendere una quantità di energia pari a quella data dalla (2.25). Questa energia, indicata generalmente con $W(r)$, prende il nome di *energia potenziale elettrica* del sistema. In questo particolare caso essa rappresenta l'energia potenziale della carica q_2 nel campo generato dalla carica q_1 . Il ragionamento resta ovviamente valido se si scambia q_1 con q_2 . Utilizzando l'espressione del potenziale generato da una carica q_1 la (2.25) può anche essere scritta:

$$W = q_2 \varphi(r_{12}). \quad (2.26)$$

Supponiamo ora che le due cariche positive q_1 e q_2 siano poste nei punti P_1 e P_2 e calcoliamo il lavoro necessario per portare una terza carica positiva q_3 dall'infinito ad un punto P_3 che disti r_{13} dal punto P_1 ed r_{23} dal punto P_2 .

Per calcolare il lavoro necessario facciamo uso del principio di sovrapposizione: calcoleremo cioè il lavoro come somma di quello eseguito per portare la carica q_3 nel punto P_3 quando è presente solo la carica q_1 e di quello eseguito per portare la carica q_3 nel punto P_3 quando è presente solo la carica q_2 . Il risultato è:

$$W = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}}. \quad (2.27)$$

Il lavoro totale per costituire questo sistema di tre cariche è quindi dato da:

$$W_T = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}}. \quad (2.28)$$

-L^Λ-

Facciamo notare che W_T non dipende dall'ordine con cui le cariche sono state avvicinate ma soltanto dalla configurazione finale. Inoltre risulta ovvio dal procedimento utilizzato che si è supposta nulla l'energia potenziale quando le cariche sono a distanza infinita le une dalle altre.

Generalizzando al caso di un sistema di N cariche poste in P_1, \dots, P_N la relazione (2.28) diventa:

$$W_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}}. \quad (2.29)$$

(2.29)

Questa energia è una caratteristica del sistema considerato nel suo insieme. La configurazione di cariche descritta non rappresenta un sistema stabile; infatti se si lasciano le cariche libere di muoversi, avendole supposte tutte dello

stesso segno, esse si allontaneranno le une dalle altre e acquisteranno energia cinetica a spese dell'energia potenziale iniziale.

2.7 Il teorema di Gauss

Consideriamo una superficie chiusa S posta in una regione dello spazio dove esista un campo elettrico \mathbf{E} . Si definisce flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso la superficie S l'espressione:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (2.30)$$

(2.3)

dove \mathbf{n} è il versore in ogni punto normale alla superficie diretto verso l'esterno. Prendiamo in esame il caso più semplice di campo elettrico \mathbf{E} generato da una carica puntiforme q posta all'interno della superficie S come mostrato in Fig. 2.5.

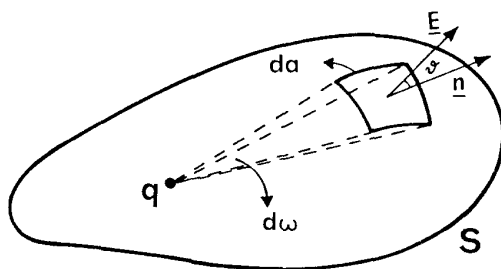


FIG. 2.5 - Flusso attraverso una superficie S chiusa del campo elettrico generato da una carica puntiforme q posta all'interno della superficie.

Sostituendo nella (2.30) il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme otteniamo:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \, da. \quad (2.31)$$

Poiché $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r \cos \vartheta$ e l'integrale può essere scritto:

$$\frac{da \cos \vartheta}{r^2} = d\omega, \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\omega \quad (2.32)$$

dove $d\omega$ è l'angolo solido con vertice in q sotteso dalla superficie elementare da . L'integrale di dco esteso a tutta la superficie chiusa S è uguale a 4π , qualunque sia il punto preso come vertice all'interno di S . Quindi la (2.32) diviene:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.33)$$

La relazione (2.33) è molto importante perché fa vedere come il flusso del vettore \mathbf{E} non dipenda dalla particolare superficie attraverso la quale è stato calcolato ma solo dalla carica contenuta all'interno della superficie.

Tale risultato è una conseguenza del fatto che il campo elettrico ha una dipendenza dalla distanza che va come $1/r^2$.

Quindi ogni verifica sperimentale del teorema di Gauss è indirettamente anche una verifica della legge di Coulomb. Nel caso in cui la carica sia posta sulla superficie S l'integrale (2.32) deve essere esteso solo su un semispazio e pertanto si ha:

$$\phi_S(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.34)$$

Se la carica puntiforme q è esterna alla superficie S l'integrale (2.32) è nullo perché, come si vede dalla Fig. 2.6, la somma dei flussi attraverso i due elementi di superficie dS_1 e dS_2 , intercettati dallo stesso angolo solido elementare $d\omega$, è nulla in quanto il numero di linee di forza che attraversano dS_1 e dS_2 è lo stesso.

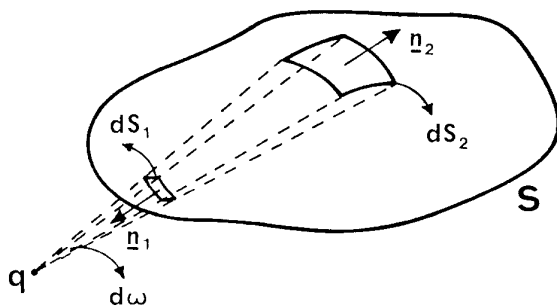


FIG. 2.6 - Flusso attraverso una superficie chiusa S del campo elettrico generato da una carica puntiforme q posta all'esterno della superficie.

Estendendo questo ragionamento a tutta la superficie S si trova che nel caso di carica puntiforme esterna il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie S è nullo. Se la superficie S racchiude più cariche puntiformi q_1, q_2, \dots, q_N allora il teorema di Gauss, utilizzando il principio di sovrapposizione, porta al risultato:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Generalizziamo ora al caso di una distribuzione continua di carica con densità volumetrica $\rho(x, y, z)$ contenuta in un volume V . Ogni elemento di volume dv contiene una quantità di carica $\rho \, dv$ e dà un contributo $\rho \, dv / \epsilon_0$ al flusso del campo elettrico uscente da una superficie S contenente il volume V . Eseguendo l'integrale su tutto il volume V si trova che:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv. \quad (2.35)$$

Usando il teorema della divergenza per trasformare il primo integrale, otteniamo:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (2.36)$$

e poiché la relazione deve essere valida qualunque sia il volume di integrazione si ha che:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.37)$$

La formula (2.37) è chiamata forma differenziale del teorema di Gauss.

2.8 Campo elettrico generato da semplici distribuzioni di cariche

2.8.1 Filo uniformemente carico

Consideriamo un filo sottile indefinito rettilineo uniformemente carico con densità di carica λ , per unità di lunghezza. Data la simmetria del problema (Fig. 2.7) si può senz'altro affermare che il campo elettrico \mathbf{E} è diretto radialmente ed è indipendente dalla coordinata z e dall'angolo azimutale. Inoltre le superficie equipotenziali sono delle superficie cilindriche aventi come asse il filo carico. Il calcolo del campo elettrico \mathbf{E} in un punto P distante r dal filo si riduce così al calcolo del solo campo radiale $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

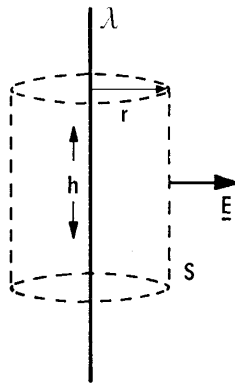


FIG. 2.7 - Applicazione del teorema di Gauss ad un filo indefinito uniformemente carico.

Consideriamo una superficie S cilindrica di raggio r , di altezza h , passante per P e calcoliamo il flusso di \mathbf{E} attraverso questa superficie. Poiché il campo elettrico è diretto lungo il raggio, il flusso attraverso le due superficie di base del cilindro è nullo e il flusso totale uscente dal cilindro è:

$$\Phi_s(\mathbf{E}) = 2\pi r h E(\mathbf{r}) \quad (2.38)$$

Applicando il teorema di Gauss e tenendo conto che la carica racchiusa in S è $q = h\lambda$ si ottiene :

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} . \quad (2.39)$$

(2.39)

2.8.2 Sfera uniformemente carica

Consideriamo una sfera di raggio R carica uniformemente con densità di carica volumetrica ρ . Calcoliamo il valore del campo elettrico ad una distanza r dal centro della sfera, internamente ed esternamente ad essa, vale a dire per i casi $r \leq R$ ed $r > R$. Per ragioni di simmetria il campo elettrico è diretto radialmente e ha uguale intensità su ogni superficie sferica concentrica alla sfera carica. Calcoliamo il campo elettrico in un punto P distante r dal centro, con $r < R$. Costruiamo una superficie sferica S di raggio r e calcoliamo il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie:

$$\Phi_s(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E(\mathbf{r}) . \quad (2.40)$$

La carica racchiusa dalla superficie S è, $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

Il teorema di Gauss fornisce allora per il campo elettrico:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} . \quad (2.41)$$

Il campo elettrico a distanza R dal centro, cioè sulla superficie della sfera carica vale pertanto:

$$E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} . \quad (2.42)$$

(2.42)

Nel caso di $r \leq R$ il campo elettrico è determinato quindi solo dalle cariche interne alla superficie sferica di raggio r .

Per un punto P a distanza $r > R$ dal centro della sfera il calcolo del campo elettrico viene ancora eseguito costruendo una superficie sferica S di raggio r . Il flusso di \mathbf{E} attraverso questa superficie è:

$$\Phi_s(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

La quantità di carica contenuta nella sfera è $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$; quindi, per il teorema di

Gauss, il campo elettrico risulta essere:

$$E = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (2.44)$$

(2.44)

o anche:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (2.45)$$

cioè lo stesso che si avrebbe se tutta la carica della sfera fosse concentrata nel suo centro.

In Fig. 2.8 (a) è riportato l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dal centro della sfera carica.

Come caso particolare del problema precedente consideriamo una superficie sferica di raggio R uniformemente carica con densità superficiale σ . Per $r > R$ vale la relazione (2.45) dove $q = 4\pi R^2 \sigma$, per $r < R$ si ha invece $E = 0$.

(Fig. 2.8 (b)).

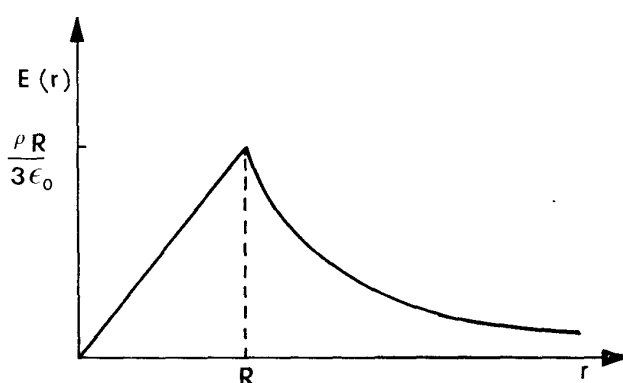


FIG. 2.8 a) - Andamento del campo elettrico prodotto da una sfera uniformemente carica in funzione della distanza dal centro della sfera.

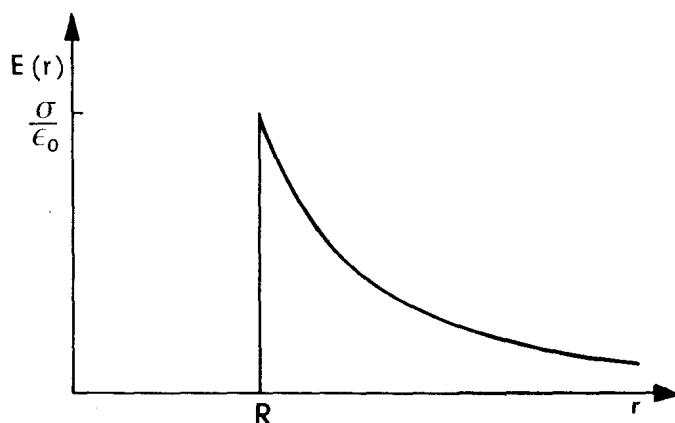


FIG. 2.8 b) - Andamento del campo elettrico prodotto da una superficie sferica uniformemente carica in funzione della distanza dal centro della sfera.

2.8.3 Distribuzione piana

Prendiamo ora in esame una distribuzione superficiale piana di carica, di densità σ uniforme, ed indefinitamente estesa. Una distribuzione di questo genere può essere realizzata per esempio mediante uno strato di cariche disposte uniformemente su un piano nello spazio. Nella Fig. 2.9 rappresentiamo questa pellicola di cariche mediante il piano Π .

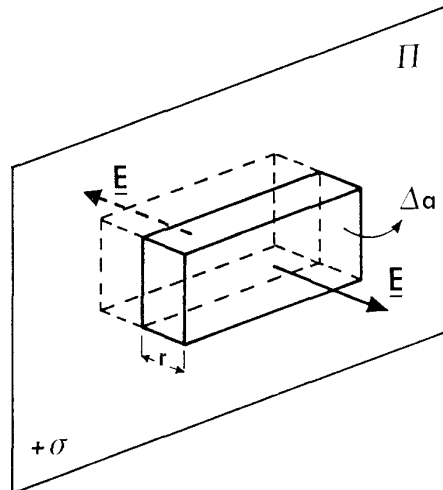


FIG. 2.9 - Applicazione del teorema di Gauss ad una distribuzione piana di cariche.

Per ragioni di simmetria il campo elettrico è diretto in entrambi i semispazi perpendicolarmente alla superficie e in punti simmetrici rispetto al piano assume lo stesso valore ma ha verso opposto. Inoltre i piani paralleli al piano carico sono superficie equipotenziali.

Per il calcolo del campo elettrico costruiamo un parallelepipedo come mostrato in Fig. 2.9 con area di base Δa . Poiché il campo elettrico è perpendicolare alle basi e parallelo alle altre faccie, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie racchiusa dal parallelepipedo risulta essere:

$$\Phi(\mathbf{E}) = 2E\Delta. \quad (2.46)$$

La carica totale racchiusa dalla superficie del parallelepipedo è $q = \sigma\Delta a$. Pertanto per il teorema di Gauss:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.47)$$

Facciamo notare che il campo elettrico non dipende dalla distanza dal piano. Questo è dovuto al fatto che le cariche che contribuiscono maggiormente al valore del campo elettrico in un punto distante r dal piano sono in prima

approssimazione quelle contenute in una zona di dimensioni r attorno alla proiezione del punto sul piano. La quantità di carica è quindi proporzionale ad r^2 ; d'altra parte se questa carica fosse tutta concentrata in un punto il campo elettrico dipenderebbe dalla distanza come $1/r^2$. In maniera intuitiva possiamo perciò dire che le due dipendenze si *bilanciano* e quindi il campo elettrico risulta indipendente dalla distanza r dal piano carico

In pratica non si avrà mai a che fare con una distribuzione piana infinitamente estesa. Tuttavia il procedimento usato in questo paragrafo sarà ancora valido nel caso di una distribuzione piana limitata nello spazio se andremo a calcolare il campo in un punto posto a distanza molto minore delle dimensioni lineari della distribuzione.

2.8.4 Doppia distribuzione piana

Come estensione del caso precedente consideriamo due distribuzioni superficiali di cariche, piane, uniformi indefinitamente estese, affacciate, una con densità $+\sigma$ e una con densità $-\sigma$. Nella Fig. 2.10 le due distribuzioni sono disegnate perpendicolarmente al foglio.

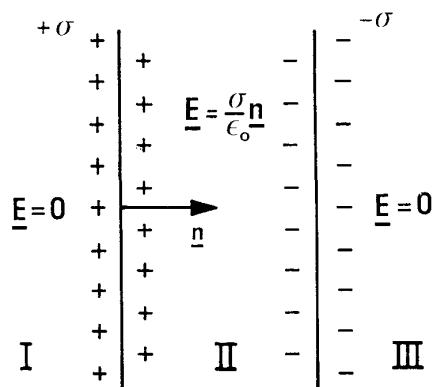


FIG. 2.10 - Doppia distribuzione piana.

Il calcolo del campo elettrico può essere eseguito considerando separatamente i valori dei campi generati dalle due distribuzioni. Nelle regioni I e III, indicate in figura, il campo elettrico totale è nullo. Infatti le due distribuzioni danno luogo a campi elettrici diretti entrambi perpendicolarmente ai piani carichi ma con verso opposto. Inoltre, i due campi elettrici hanno lo stesso modulo perché la densità superficiale $+\sigma$ è uguale in valore assoluto a quella $-\sigma$ e nel caso di distribuzioni indefinite il valore del campo elettrico generato non dipende dalla distanza dalla superficie carica.

Anche nella regione II, interna alle distribuzioni, il campo elettrico totale può essere ottenuto come somma dei campi elettrici dovuti alle due distribuzioni

prese singolarmente. Se indichiamo con \mathbf{E}_+ il campo dovuto alla distribuzione $+\sigma$ con \mathbf{E}_- quello dovuto alla distribuzione $-\sigma$ abbiamo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

dove si è tenuto conto del fatto che il campo elettrico \mathbf{E}_+ deve avere direzione uscente dalla superficie carica positivamente mentre \mathbf{E}_- deve avere direzione entrante rispetto alla superficie carica negativamente.

Per il risultato del paragrafo precedente, si ha che il campo totale tra le due superfici è:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}.$$

Per la distribuzione di carica negativa il segno meno non compare avendolo già considerato nella determinazione del verso del campo \mathbf{E}_- .

2.9 Conduttori ed isolanti

È possibile verificare sperimentalmente che esistono notevoli differenze tra i materiali per quanto riguarda le proprietà elettriche, come per esempio la possibilità di essere elettrizzati o di mantenere per un certo periodo lo stato di elettrizzazione.

Almeno in prima approssimazione è possibile, per quanto riguarda i fenomeni di elettrizzazione, classificare i materiali in due grandi categorie: i materiali *conduttori*, tra i quali rientrano i metalli, e i materiali *isolanti* o *dielettrici*, di cui sono esempi il vetro, la paraffina, la mica e le sostanze plastiche in genere.

La causa della diversificazione del comportamento dei materiali conduttori ed isolanti è legata alla loro struttura interna. Infatti i materiali conduttori sono caratterizzati dalla presenza di un grande numero di cariche elettriche, essenzialmente elettroni, libere di muoversi all'interno del materiale sotto l'effetto di campi elettrici anche molto deboli. I materiali isolanti sono invece caratterizzati dall'avere atomi e molecole con gli elettroni fortemente legati e che quindi sotto l'azione di un campo elettrico si spostano di poco dalla loro posizione iniziale. Uno studio più particolareggiato del moto degli elettroni nei corpi solidi in generale verrà fatto più avanti. Ci limiteremo qui ad alcune considerazioni intuitive. Inoltre, d'ora in avanti, a meno che non venga specificato diversamente, ci occuperemo solo di conduttori metallici. La differenza che esiste tra un buon conduttore e un buon isolante per quanto riguarda la *conducibilità elettrica*, cioè la capacità di rispondere ad un campo elettrico applicato, è di un fattore 10^{20} . Questo comporta che per un isolante occorre un tempo 10^{20} volte maggiore che per un conduttore per raggiungere la situazione di equilibrio.

È abbastanza noto come sia possibile elettrizzare per strofinio un corpo isolante e non sia invece possibile farlo con un conduttore a meno di non ricorrere ad opportuni accorgimenti. Questo fenomeno è interpretabile tenendo conto,

come abbiamo detto, della facilità che hanno le cariche di muoversi rapidamente nel conduttore e di dissiparsi a terra attraverso il corpo dello sperimentatore che costituisce anche esso un buon conduttore. Basterebbe tuttavia ricoprire l'impugnatura del conduttore mediante un materiale dielettrico per costringere le cariche, impossibilitate ad attraversare l'isolante, a rimanere sul conduttore.

In natura è possibile trovare materiali con comportamento intermedio tra quello di un buon conduttore e di un buon isolante. Inoltre uno stesso materiale a seconda delle condizioni fisiche in cui si trovi può presentare proprietà di conduttore o di isolante.

Una categoria di materiali che ha un comportamento di questo tipo, intermedio tra quello di un conduttore e di un isolante ideale, è quello dei cosiddetti *semiconduttori*.

2.10 Conduttori in presenza di campo elettrico. - Teorema di Coulomb

Da quanto detto nel paragrafo precedente risulta che conduttori ed isolanti hanno un comportamento diverso in presenza di un campo elettrico esterno. In questo capitolo e nel successivo limiteremo la nostra attenzione ai conduttori mentre lo studio del comportamento degli isolanti è rimandato al capitolo 4. Sotto l'azione di un campo elettrico gli elettroni nei conduttori si mettono in moto e raggiungono una nuova posizione di equilibrio in intervalli di tempo estremamente brevi. Tale situazione, in cui le cariche sono ferme, deve corrispondere ad un campo elettrico nullo dovunque all'interno del corpo. Se infatti vi fosse un campo elettrico diverso da zero vi sarebbe ancora un moto di cariche e l'equilibrio non sarebbe raggiunto. Scopo dell'elettrostatica è appunto lo studio di tale situazione di equilibrio, trascurando i fenomeni che si verificano nei brevi intervalli di tempo precedenti.

In Fig. 2.11 è rappresentato l'effetto dell'applicazione di un campo elettrico

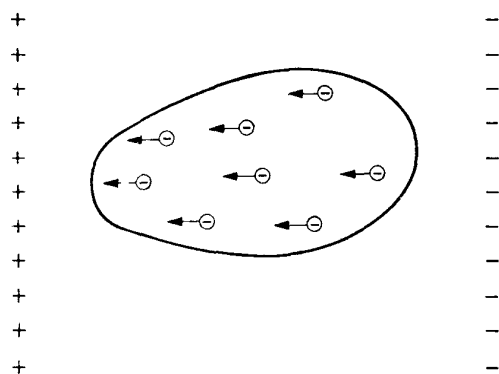


FIG. 2.11 a) - Gli elettroni liberi di un conduttore sotto l'azione di un campo elettrico esterno si muovono all'interno del conduttore.

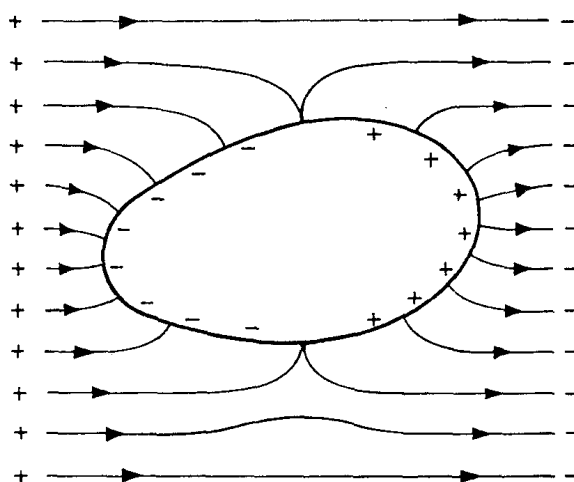


FIG. 2.11 b) - Distribuzione delle cariche indotte su un conduttore immerso in un campo elettrico esterno. All'interno del conduttore il campo elettrico è nullo. All'esterno le linee di forza del campo, inizialmente uniforme, vengono distorte per la presenza delle cariche indotte.

ad un conduttore. In assenza di campo elettrico le cariche, elettroni ed ioni, sono distribuite in maniera isotropa all'interno del materiale in modo che in media, su una regione grande rispetto alle dimensioni atomiche, il campo elettrico risultante da esse generato è nullo. In Fig. 2.11 (a) gli elettroni liberi del corpo, immerso in un campo elettrico generato per esempio da una doppia distribuzione piana di cariche, cominciano a spostarsi fino a raggiungere la nuova situazione di equilibrio, illustrata in Fig. 2.11 (b), in cui il campo all'interno del conduttore, risultante dalla somma del campo esterno e da quello prodotto dalla nuova distribuzione di cariche venutasi a formare, è nullo. Questa nuova distribuzione di cariche è dovuta allo spostamento subito dagli elettroni che ha prodotto un eccesso di cariche positive in un lato del conduttore ed un eccesso di cariche negative nel lato opposto. Come appare dalla figura, anche il campo esterno subisce delle modificazioni. Tuttavia se ci allontaniamo sufficientemente dal corpo le linee di forza tendono ad assumere l'andamento che avrebbero avuto in assenza del conduttore. Generalizzando l'esempio ora illustrato possiamo affermare che in un conduttore omogeneo in condizioni normali di equilibrio il campo elettrico è nullo. Questo significa che il volume del conduttore è equipotenziale e quindi la superficie che lo limita è una superficie equipotenziale. Immediata conseguenza di ciò è che in punti esterni prossimi al conduttore il campo elettrico è perpendicolare alla superficie del conduttore stesso.

La terra è un conduttore di grandi dimensioni, perciò tutti i suoi punti avranno uguale potenziale. Per convenzione si assume che il potenziale della terra sia uguale a zero. *Mettere a terra* un conduttore significa collegarlo mediante un altro conduttore con la terra. In questo caso terra e conduttore formano un unico conduttore tutto allo stesso potenziale e cioè al potenziale della terra. Infatti proprio per le sue dimensioni la terra può assorbire notevoli quantità

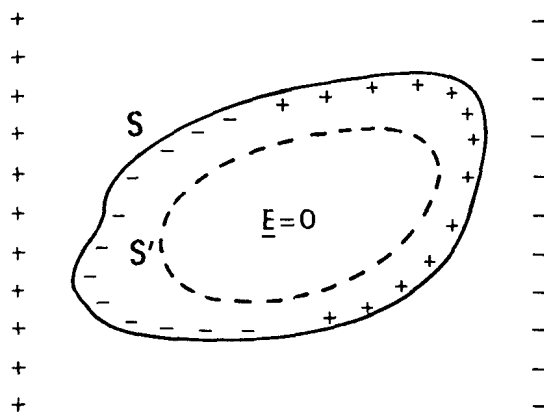


FIG. 2.12 - Applicazione del teorema di Gauss per dimostrare che nel caso di un corpo conduttore le cariche elettriche in eccesso sono localizzate sulla superficie.

di carica senza che il proprio potenziale vari e un qualunque conduttore collegato elettricamente con essa ne assume il potenziale. Quando nel seguito parleremo di potenziale di un conduttore si intenderà parlare della differenza di potenziale tra tale conduttore e la terra.

Un'altra conseguenza di quanto detto è che la distribuzione di carica che si forma per raggiungere il nuovo equilibrio è localizzata sulla superficie del conduttore in uno strato dell'ordine delle dimensioni atomiche. Applicando infatti il teorema di Gauss ad una superficie S' interna alla superficie S che limita il conduttore (Fig. 2.12) si trova che, essendo nullo all'interno del conduttore il campo elettrico, il flusso attraverso S' del campo è nullo e nulla deve essere la carica contenuta in S' . Facendo tendere la superficie S' ad S si trova che la distribuzione di cariche può esistere solo su S . Tenendo conto delle dimensioni finite delle cariche questo significa che la distribuzione è localizzata su uno strato superficiale.

È necessario a questo punto osservare che tutti i ragionamenti finora fatti hanno indicato che l'azione di un campo elettrico su un conduttore determina soltanto una ridistribuzione delle cariche internamente ad esso. Un conduttore inizialmente scarico, sotto l'effetto di un campo elettrico, resta quindi globalmente scarico anche se assume una distribuzione di cariche non uniforme.

Consideriamo ora un conduttore inizialmente scarico, in assenza di campo elettrico esterno, su cui venga depositata una certa quantità di carica q . È facile dimostrare, con un ragionamento analogo al precedente, utilizzando il teorema di Gauss e il fatto che il campo elettrico deve essere nullo all'interno di un conduttore, che questa carica si distribuisce opportunamente sulla superficie esterna del conduttore. Tale distribuzione σ genera un campo elettrico esterno diverso da zero. La superficie del conduttore rappresenta quindi una discontinuità per il campo elettrico e questa discontinuità è dovuta alla presenza della distribuzione σ di cariche sulla superficie.

È possibile ricavare una semplice relazione tra il campo elettrico in un punto

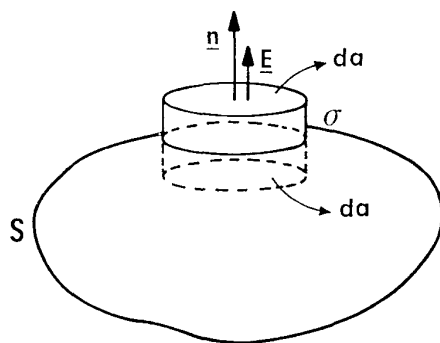


FIG. 2.13 - Dimostrazione del teorema di Coulomb.

prossimo alla superficie S del conduttore e il valore σ della distribuzione di carica in prossimità del punto.

Consideriamo il conduttore di Fig. 2.13 sulla superficie S del quale sia distribuita una carica q con densità superficiale σ non uniforme tale che

$$q = \int_S \sigma$$

Costruiamo un cilindretto infinitesimo di basi da , una interna e l'altra esterna al conduttore, con le generatrici perpendicolari alla superficie del conduttore, quindi parallele ad \mathbf{E} , e di altezza infinitesima del secondo ordine rispetto alle dimensioni lineari della base.

Applicando il teorema di Gauss al cilindretto, essendo per costruzione nullo il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale, ed essendo nullo il flusso attraverso la base interna al conduttore perché il campo elettrico è ivi nullo, si ottiene

$$(2.49) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{\sigma da}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

da cui

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.50)$$

Questo risultato è noto come *teorema di Coulomb*.

Sottolineiamo il fatto che il campo elettrico in un punto prossimo alla superficie del conduttore è espresso nella (2.50) mediante il valore della distribuzione di carica immediatamente prossima al punto anche se in realtà esso è determinato da tutte le cariche distribuite sul conduttore. A maggior chiarimento di ciò consideriamo i punti A e B di Fig. 2.14, relativa ad un conduttore carico, e l'elemento di superficie da . Il campo elettrico nel punto A esterno al conduttore è la somma del campo \mathbf{E}_1 generato dalle cariche distribuite su da più il campo \mathbf{E}_2 generato da tutte le altre cariche poste sulla rimanente superficie del conduttore. Lo stesso si può dire per il punto B interno alla superficie. Mentre però passando da A a B, data la vicinanza dei due punti, il campo \mathbf{E}_2 rimane uguale in modulo e orientamento, \mathbf{E}_1 in A e B ha ugual modulo ma verso opposto. Si possono quindi

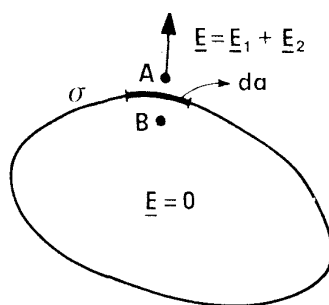


FIG. 2.14 - Il campo elettrico in un punto esterno ad un conduttore carico molto vicino alla superficie del corpo è dovuto a tutte le cariche distribuite sul conduttore.

scrivere le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \\ \mathbf{E}_B &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

da cui ricaviamo che:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n}. \quad (2.52)$$

Sulle cariche poste in da agisce il campo \mathbf{E}_2 con una forza data da:

$$\begin{aligned} \text{La forza che agisce per } d\mathbf{F} &= \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \right) \sigma da, \text{ tanto:} \\ \frac{dF}{da} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Questa quantità prende il nome di *pressione elettrostatica* ed è associata a una forza che tende ad allontanare le cariche del conduttore.

2.11 Induzione elettrostatica

Il fenomeno per cui in presenza di un campo elettrico esterno comunque generato le cariche libere di un conduttore si ridistribuiscono prende il nome di *induzione elettrostatica*.

In particolare se avviciniamo un corpo carico A ad un conduttore isolato B scarico notiamo che sulla parte di B affacciata ad A appare una distribuzione di

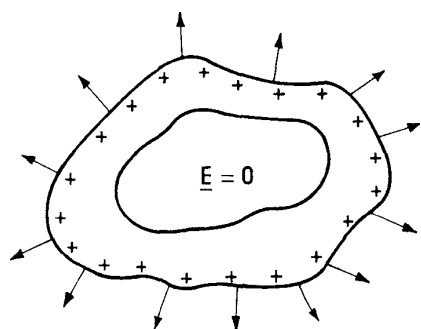


FIG. 2.15 a) - All'interno di un conduttore cavo non contenente cariche elettriche il campo elettrico è nullo.

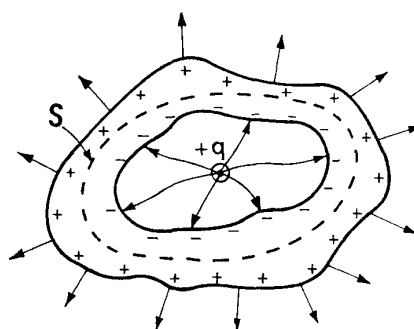


FIG. 2.15 b) - Cariche indotte prodotte sulla superficie interna ed esterna di un conduttore cavo contenente una carica q .

carica di segno opposto a quella di A , che la parte più lontana presenta una distribuzione dello stesso segno e che la parte intermedia resta neutra. Le cariche che si manifestano sul corpo B prendono il nome di *cariche indotte*. Come già detto nel paragrafo precedente la distribuzione finale di cariche sarà tale da rendere il campo elettrico E nullo in ogni punto interno del conduttore B che rimarrà globalmente scarico. In conclusione avremo allora che in ogni punto interno al corpo B il campo elettrico generato dalle cariche indotte sarà uguale e contrario a quello generato dalle cariche poste su A ed in ogni punto esterno dello spazio il campo elettrico sarà la somma del campo prodotto dalle cariche poste su A e di quello prodotto dalle cariche indotte poste su B .

Possiamo quindi enunciare le leggi dell'induzione elettrostatica: (a) *la somma delle cariche indotte è nulla*; (b) *la distribuzione delle cariche indotte è tale da rendere il conduttore una regione equipotenziale*.

Consideriamo un conduttore scarico cavo come quello mostrata in Fig. 2.15. Abbiamo dimostrato, applicando il teorema di Gauss, che ponendo una carica sul conduttore, (Fig. 2.15 (a)), dovendo il campo elettrico all'interno, e quindi nella cavità, essere nullo, essa si dispone sulla sua superficie. Le linee di forza del campo elettrico avranno origine dalle cariche poste sulla superficie e andranno all'infinito.

Poniamo ora all'interno della cavità dello stesso corpo, preso scarico per semplicità, una carica $+q$. Appliciamo il teorema di Gauss ad una superficie S interna al conduttore. (Fig. 2.15 (b)). Essendo il campo elettrico nullo nel conduttore deve essere nullo il flusso di E attraverso S e quindi la carica in essa contenuta. Ripetendo il ragionamento al tendere della superficie S alla superficie della cavità si conclude che su tale superficie deve essere distribuita una quantità di carica uguale ed opposta alla carica $+q$ situata all'interno della cavità. Questa carica $-q$ è quella generata per induzione dalla carica $+q$. Inoltre per la prima legge dell'induzione deve esistere anche una carica indotta $+q$ in modo che la carica totale indotta sia nulla. La carica indotta $+q$ non può che essere distribuita sulla superficie esterna del conduttore.

Facciamo notare che in questo caso la carica indotta, positiva o negativa, è in modulo uguale alla carica inducente. Si parla allora di *induzione completa*, fenomeno che in generale si verifica tutte le volte che il corpo inducente è racchiuso dal corpo sul quale si manifestano le cariche indotte. Per una configurazione generica dei corpi sui quali si distribuiscono le cariche, si ha che cariche indotte e cariche induttrici non hanno necessariamente lo stesso valore.

Le linee di forza per l'esempio da noi considerato sono quelle mostrate in Fig. 2.15(b).

In un conduttore cavo dello stesso tipo di quello finora utilizzato, ma non contenente cariche nella cavità, il potenziale all'interno della cavità è costante ed eguale al potenziale del conduttore. Tale potenziale, pur variando al variare delle distribuzioni di cariche esterne, puntiformi o poste sui conduttori, si mantiene uguale in ogni punto del conduttore e della cavità. Risulta quindi impossibile produrre campi elettrici all'interno della cavità agendo dall'esterno. Il conduttore cavo rappresenta in queste condizioni uno *schermo elettrostatico*.

Qualora nella cavità vi fossero corpi carichi il campo elettrico interno sarebbe diverso da zero ma per quanto detto non potrebbe essere modificato dalla presenza di campi esterni.

L'unico effetto dei campi esterni sarebbe quello di far variare il potenziale di un valore costante in tutti i punti del volume occupato dal conduttore. Se inoltre si fa in modo di mantenere costante il potenziale del conduttore, per esempio collegandolo con la terra, all'interno della cavità non potranno essere rivelate in nessun modo variazioni di campo esterno.

Lo schermaggio elettrostatico è utilizzato quando si voglia isolare da influenze elettriche esterne strumenti di misura molto sensibili.

3

Problema generale dell'elettrostatica

3.1 Equazioni di Poisson

Come abbiamo già mostrato nel capitolo precedente il campo elettrostatico è completamente descritto dalle due equazioni differenziali:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (3.2)$$

valide qualunque sia la distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r})$, essendo \mathbf{r} il vettore che individua la posizione di un punto qualsiasi di coordinate cartesiane x, y, z .

La (3.2) implica che il campo elettrostatico può essere espresso come il gradiente di una funzione scalare. Secondo quanto mostrato nel paragrafo 2.5 abbiamo allora che:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (3.3)$$

Accoppiando le relazioni (3.1) e (3.3) otteniamo:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.4)$$

che, per mezzo della (1.60), può essere scritta nella forma:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.5)$$

È questa un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine nota sotto il nome di *equazione di Poisson*.

Nel caso che la sorgente del campo sia costituita unicamente da cariche elettriche distribuite in un volume finito V con densità $\rho(x, y, z)$, l'unica soluzione $\varphi(x, y, z)$ che si annulla all'infinito risulta data ¹⁾ da:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.6)$$

relazione che avevamo già introdotto nel paragrafo 2.5.

Nel caso quindi che la distribuzione $\rho(x, y, z)$ sia una funzione nota il problema generale dell'elettrostatica, consistente nel calcolo del potenziale e del campo elettrico in ogni punto dello spazio, si riduce al calcolo dell'integrale contenuto nella relazione (3.6).

La presenza tuttavia di conduttori fa sì che, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, la distribuzione di carica sulla superficie dei conduttori non sia nota a priori. Per risolvere il problema dell'elettrostatica è allora necessario fare uso di altre considerazioni che permettono di mettere a punto opportuni procedimenti, alcuni dei quali verranno descritti in questo capitolo.

3.2 Equazione di Laplace e funzioni armoniche

Nella risoluzione dei problemi di elettrostatica, in cui la distribuzione di cariche non è completamente assegnata a priori, è di fondamentale importanza lo studio dell'*equazione di Laplace*

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.7)$$

valida in tutti i punti dello spazio ove $\rho(x, y, z) = 0$. Nella regione di spazio V , che supporremo finita, si dice che una funzione $\varphi(x, y, z)$ è *armonica* se essa è ivi finita e continua nelle derivate prime, ammette le derivate seconde e soddisfa all'equazione di Laplace $\nabla^2 \varphi = 0$.

Le funzioni armoniche soddisfano ad alcuni teoremi importanti.

1° *Teorema di unicità (problema di Dirichlet)*.

«Data una superficie S chiusa, la funzione armonica che sulla S assume un valore assegnato (φ), esiste, ed è univocamente determinata».

La dimostrazione si può conseguire facilmente ragionando per assurdo. Supponiamo, se è possibile, che esistano due di tali funzioni distinte l'una dall'altra: siano esse $\varphi_1(x, y, z)$ e $\varphi_2(x, y, z)$. Essendo esse per ipotesi armoniche soddisferanno le equazioni

¹⁾ Per la dimostrazione vedasi ad es. il testo «Classical Electrodynamics» di J. Jackson pag. 13.

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \qquad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \qquad (3.8)$$

Discendendo da queste che:

$$\nabla^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0 \qquad (3.9)$$

sarà armonica anche la funzione $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Dovendo, sempre per ipotesi, φ_1 e φ_2 assumere su S un valore assegnato dovrà essere φ_{1S} e φ_{2S} , per cui $\varphi_S = 0$

Tenendo conto allora che $\nabla^2 \varphi = 0$ e $\varphi_S = 0$, consideriamo la quantità $\text{div} (\varphi \mathbf{grad} \varphi)$, integriamo sul volume V , e applichiamo il teorema della divergenza :

$$\int_V \text{div} (\varphi \mathbf{grad} \varphi) dv = \int_S (\varphi \mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} da . \qquad (3.10)$$

L'integrale a destra, poiché la funzione φ è nulla su S , è uguale a zero. Utilizzando la relazione contenuta nella Tabella 1.1. possiamo sviluppare il termine $\text{div} (\varphi \mathbf{grad} \varphi)$ sotto segno di integrale ed ottenere :

$$\int_V \text{div} (\varphi \mathbf{grad} \varphi) dv = \int_V \varphi \nabla^2 \varphi dv + \int_V (\mathbf{grad} \varphi)^2 dv = 0 . \qquad (3.11)$$

Poiché il termine $\nabla^2 \varphi$ è uguale a zero in ogni punto di V questa espressione si riduce a:

$$\int_V (\mathbf{grad} \varphi)^2 dv = 0 . \qquad (3.12)$$

Essendo la funzione integranda una funzione continua positiva o nulla a integrale nullo, dovrà essere

$$\mathbf{grad} \varphi = 0 \qquad (3.13)$$

per cui risulterà $\varphi = \text{costante}$.

Ma essendo la φ nulla sulla superficie S , essa sarà allora nulla ovunque all'interno della regione V . Le due funzioni φ_1 e φ_2 saranno cioè ovunque eguali.

Il problema di determinare una funzione armonica $\varphi(x, y, z)$, di cui sia assegnato il valore in tutti i punti di una superficie S , dicesi *problema di Dirichlet* ¹⁾.

¹⁾ Riemann ha dimostrato che la funzione armonica definita nella regione V , la quale assume valori assegnati sulla superficie S , è quella fra tutte le funzioni capaci di assumere questi valori, che rende minima l'espressione $\int_V (\mathbf{grad} \varphi)^2 dv$. Dimostrato ciò, Riemann ha creduto di poter affermare che esiste certamente una funzione capace di rendere minima l'espressione precedente. Weierstrass ha però precisato che non sempre tale funzione esiste, perché si presentano casi in cui l'integrale in considerazione ammette un limite inferiore senza però avere un minimo.

2° Teorema di unicità. (Problema di Neumann).

« Se due funzioni armoniche, definite in una regione di volume V , sono tali che le loro derivate normali prendono valori assegnati sulla superficie S , esse differiscono per una costante».

Supposta infatti l'esistenza delle due funzioni armoniche $\varphi_1(x, y, z)$ e $\varphi_2(x, y, z)$, tali cioè che $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ e $\nabla^2 \varphi_2 = 0$, discende l'armonicità della funzione $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ per cui $\nabla^2 \varphi = 0$. Siccome poi sulla superficie S per ipotesi

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad \text{dovrà anche verificarsi che} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{sempre su } S.$$

Ripetendo il procedimento usato nella dimostrazione del caso precedente abbiamo che l'integrale a destra nella relazione (3.10) è ora nullo perché su

S si verifica che $\mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ è uguale a zero, per le ipotesi assunte sulle condizioni al contorno. Si ha allora di nuovo tramite la (3.11)

$$\int_V (\mathbf{grad} \varphi)^2 dv = 0$$

da cui, come già si è visto, deriva $\varphi(x, y, z) = \text{costante}$ su tutto il volume V , come volevamo dimostrare.

Si noti che i valori $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ della derivata normale di una funzione armonica non possono essere assegnati ad arbitrio su una superficie, nel campo in cui la funzione è armonica, dovendo soddisfare alla condizione:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} da = 0 \quad (3.14)$$

che si ricava immediatamente considerando l'espressione:

$$\int_V \nabla^2 \varphi dv = \int_V \text{div} (\mathbf{grad} \varphi) dv = \int_S \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} da = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} da = 0. \quad (3.15)$$

Il problema della determinazione di una funzione armonica in una regione di volume V , della quale funzione si conoscono i valori $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ della derivata normale sulla superficie di V , dicesi *problema di Neumann*.

3°. Teorema della media.

È dovuto a Gauss e afferma che il «valore medio che una funzione armonica $\varphi(x, y, z)$ assume su una superficie sferica qualsiasi, purché contenuta nella regione di armonicità di φ , è uguale al valore che la funzione $\varphi(x, y, z)$ assume nel centro della sfera».

Consideriamo una sfera di raggio r con centro in un punto P_0 , superficie S e volume V . Il valore medio della funzione $\varphi(x, y, z)$ sulla superficie sferica è :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \varphi da. \quad (3.16)$$

Utilizzando coordinate sferiche con centro in P_0 l'elemento infinitesimo di superficie si scrive $da = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ e avremo così che:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \varphi(r, \vartheta, \phi) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (3.17)$$

Una volta scelto il punto P_0 la funzione $\bar{\varphi}$, come risulta evidente dalla (3.17), può dipendere solo da r . Se deriviamo rispetto ad r , tenendo conto che le direzioni di \mathbf{r} e di \mathbf{n} , normale esterna, coincidono, si ha:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\varphi}{dn} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \frac{d\varphi}{dn} da.$$

utilizzando la relazione (3.15), si ottiene:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = 0 \quad (3.19)$$

cioè:

$$\bar{\varphi} = \text{costante}. \quad (3.20)$$

Questo risultato è valido per una sfera di raggio qualsiasi centrata in P_0 e pertanto rimane valido anche se si fa tendere r a zero. Ma per $r \rightarrow 0, \bar{\varphi}$ tenderà a $\varphi(P_0)$ che rappresenta quindi il valore della costante introdotta precedentemente.

In conclusione si ottiene:

$$\bar{\varphi} = \varphi(P_0) \quad (3.21)$$

su qualsiasi superficie centrata in P_0 : il teorema della media risulta così dimostrato.

3.3 Funzione armonica fondamentale

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fisso, $P(x, y, z)$ un punto variabile e r la distanza tra P_0 e P . Dimostriamo che la funzione $1/r$ è armonica in ogni campo che non contenga nel suo interno il punto P_0 .

Essendo:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad (3.22)$$

mostriamo che $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ cioè che $\text{div grad } \frac{1}{r} = 0$.

Calcolando dapprima il gradiente si ha:

$$\mathbf{grad} \frac{1}{r} = \mathbf{grad} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.23)$$

Possiamo verificare inoltre che le derivate sono

finite e continue per $P \neq P_0$. Applicando al $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$ nza troviamo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) &= \operatorname{div} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\operatorname{div} \frac{(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} = \\ &= -\frac{3r^3 - 3r[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]}{r^6} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

come volevasi dimostrare.

Si noti che la funzione $1/r$, detta funzione armonica fondamentale, presenta una singolarità nel punto $r = 0$ ove essa tende all'infinito; pertanto, come si vede dalla (3.24), in tal punto il suo laplaciano non risulta definito¹⁾.

3.4 Considerazioni sulle proprietà del campo elettrico in relazione ai teoremi precedenti sulle funzioni armoniche

È ovvio che nel caso in cui si debba calcolare il campo elettrico generato da distribuzioni note di cariche espresse analiticamente dalla funzione densità $\rho(x, y, z)$, il metodo più diretto consista nel risolvere la (3.5) ovvero sia nell'applicare la formula (3.6). Ottenuto così il potenziale si potrà determinare per mezzo della (3.3) anche il campo elettrico corrispondente. Il metodo, come mostreremo nel paragrafo seguente, risulta applicabile anche per una distribuzione di cariche discrete puntiformi.

Nei casi invece in cui il campo in una certa regione dello spazio sia generato dalla presenza di cariche distribuite su conduttori, si procede in generale al calcolo del potenziale nei punti esterni ai conduttori risolvendo l'equazione di Laplace (3.7). Il problema viene in questo modo ricondotto alla ricerca di una soluzione di detta equazione, univocamente definita per mezzo della imposizione di adeguate *condizioni al contorno*. Sulla base dei due teoremi di univocità, dimostrati al paragrafo 3.2, si è così ricondotti alla soluzione di un problema di Dirichlet, se sono assegnati i valori che il potenziale assume sulle superficie dei conduttori presenti, o a un problema di Neumann, se sono assegnati i

¹⁾ Sul significato fisico di questo fatto vedasi paragrafo 3.5.

valori del campo elettrico su tali superficie o anche (per il teorema di Coulomb) della densità superficiale di carica.

L'univocità della soluzione, sia per il problema di Dirichlet sia per il problema di Neumann, permette di asserire che, trovata in un modo qualsiasi una soluzione dell'equazione di Laplace che soddisfa alle condizioni al contorno imposte per l'uno o per l'altro problema, essa è la soluzione del problema fisico della determinazione del campo elettrico.

Si osservi che la soluzione trovata per il problema di Dirichlet o per quello di Neumann fornisce il valore del potenziale nella regione di spazio esterna ai conduttori e sulle loro superfici, ma non dà alcuna informazione sul potenziale all'interno di questi: ciò è dovuto alla presenza delle cariche sulle superficie dei conduttori e alla conseguente discontinuità per le derivate normali del potenziale. Va tuttavia ricordato che, come abbiamo a suo tempo già dimostrato, all'interno dei corpi conduttori il potenziale è costante e uguale a quello della superficie.

È necessario inoltre distinguere tra problema *chiuso* e problema *aperto*. Come problema chiuso si intende quello in cui esista una superficie chiusa S che contenga tutti gli altri conduttori; evidentemente devono essere date anche le condizioni al contorno su S . Problema aperto è invece quello in cui la superficie S tende all'infinito. In questo caso va precisato il comportamento che il potenziale deve avere all'infinito. A tale scopo si introducono le *condizioni normali*

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} r \varphi(\mathbf{r}) &= c_1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dr} &= c_2\end{aligned}$$

all'infinito e precisamente:

$$\varphi = \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \dots \quad (3.25)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie e \mathbf{r} è la distanza presa a partire dall'origine. Ciò significa che il potenziale e il campo elettrico si annullano all'infinito

rispettivamente come $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$.

Queste condizioni naturalmente sono valide sempreché all'infinito non siano presenti delle cariche.

Vogliamo ora illustrare il significato fisico connesso col teorema della media delle funzioni armoniche. Il fatto che dato un punto sulla superficie di una qualsiasi sfera centrata in P_0 si abbia

$$\varphi = \varphi(P_0) \quad (3.26)$$

ci permette di affermare che il potenziale elettrico è una funzione che non ammette, entro la regione in cui è definito, punti di minimo o di massimo. Da questo fatto deriva immediatamente l'altra importante conseguenza che una carica isolata nel vuoto non può rimanere in equilibrio stabile per effetto del solo campo elettrostatico.

Cerchiamo di giustificare queste due affermazioni. Evidentemente se in un

punto P dello spazio esistesse un minimo (o un massimo) del potenziale avremmo che il valore medio di φ su una superficie sferica centrata attorno a P sarebbe senz'altro $\varphi > \varphi(P)$ [o $\varphi < \varphi(P)$] contrariamente a quanto afferma il teorema della media.

D'altra parte perché in un campo elettrostatico *un punto nel vuoto* sia di equilibrio stabile per una carica di prova è necessario che le linee di forza di \mathbf{E} siano o tutte dirette verso il punto (carica di prova positiva), o tutte dirette dal punto verso l'esterno (carica di prova negativa) e questo non è possibile se nel punto, come abbiamo supposto, non esiste una carica sorgente del campo. Se consideriamo la Fig. 2.1 (b) notiamo che nel punto mediano tra le due cariche il campo elettrico è nullo. Questo potrebbe far credere che quel punto sia un punto di equilibrio stabile per una carica. Per convincersi del contrario basta pensare cosa succederebbe ad una carica di prova positiva, inizialmente ferma nel punto in questione, se fosse soggetta ad un piccolo spostamento da questa posizione. In effetti la carica tenderebbe ad allontanarsi sempre più dalla posizione iniziale, che quindi risulta essere di equilibrio instabile.

Dal teorema della media si deduce inoltre che se il potenziale ha un valore costante o nullo su una data superficie chiusa allora il potenziale assume lo stesso valore costante o nullo in tutto lo spazio contenuto entro la superficie.

Infine vogliamo far notare come il fatto che l'equazione di Laplace sia lineare possa essere di ausilio per la scelta della sua soluzione capace di soddisfare alle condizioni al contorno e quindi di determinare la funzione potenziale corrispondente a un determinato problema di elettrostatica.

Infatti se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono n soluzioni dell'equazione di Laplace, anche ogni combinazione lineare:

$$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n \quad (3.27)$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n sono costanti arbitrarie, è ancora una soluzione della stessa equazione. I coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n possono quindi essere determinati in modo da soddisfare alle condizioni al contorno.

3.5 Caso di cariche puntiformi. - La funzione impropria δ di Dirac

In questo paragrafo mostreremo che, anche nel caso in cui il campo elettrico sia generato da una distribuzione discreta di cariche puntiformi, continuano a valere l'equazione di Poisson (3.5) e la sua soluzione (3.6), pur di definire opportunamente la funzione densità di carica $\rho(\mathbf{r})$ che corrisponde ad una carica puntiforme. Questo può essere ottenuto introducendo la cosiddetta funzione δ (delta) di Dirac.

Questa *funzione*, scritta nel caso unidimensionale nella forma $\delta(x-x_0)$, gode delle seguenti proprietà:

$$\delta(x-x_0) = 0 \quad \text{per} \quad x \neq x_0 \quad (3.28)$$

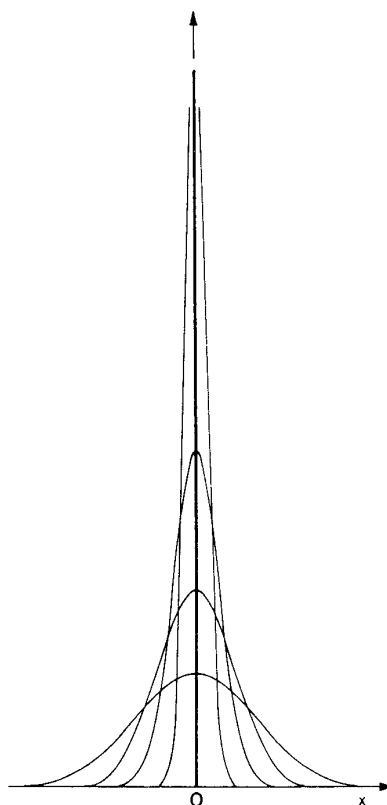
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \text{ è contenuto nell'intervallo } x_1 x_2 \\ 0 & \text{se } x_0 \text{ non è contenuto nell'intervallo } x_1 x_2 . \end{cases} \quad (3.29)$$

Si noti che a rigore la $\delta(x-x_0)$ non è dal punto di vista matematico una funzione nel senso ordinario ma una *distribuzione* (concetto questo che generalizza quello di funzione). Si suol dire che essa è una *funzione impropria*. Essa può anche essere definita come caso limite di funzioni ordinarie, ad esempio:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l}{\sqrt{\pi}} \exp \{ -l^2 (x - x_0)^2 \} .$$

La $\delta(x - x_0)$ può cioè essere presentata come caso limite di una gaussiana racchiudente un'area unitaria (cioè tale che il suo integrale per x variabile da $-\infty + \infty$ è uguale a 1) che diventi sempre più *stretta* e più *alta*, in modo che finisce con l'essere nulla dovunque all'infuori di un intervallo infinitesimo centrato intorno al punto $x = x_0$ ove assume un valore tendente all'infinito (Fig. 3.1).

FIG. 3.1 - Gaussiana di area unitaria centrata intorno al punto $x = 0$. Al limite la funzione è diversa da zero solo in un intervallo infinitesimo intorno al punto $x = 0$ dove il suo valore tende all'infinito. Essa si riduce cioè alla $\delta(x)$.



Una importante proprietà della funzione δ è espressa mediante il seguente integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3.30)$$

(3.30)

che fornisce un risultato diverso da zero sempre che il punto $x - x_0$ sia contenuto nel dominio d'integrazione. La funzione delta può essere anche definita in uno spazio a più dimensioni. Così ad esempio nel caso a tre dimensioni si ha:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.31)$$

essendo \mathbf{r} ed \mathbf{r}_0 i vettori, staccati da un'origine O , che individuano i punti $P(x, y, z)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$, per cui:

(3.32)

Valgono per questa funzione le proprietà già indicate per quella unidimensionale: la $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ha valore nullo ovunque tranne che nel punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, ed è tale che:

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 1 \quad (3.33)$$

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = f(\mathbf{r}_0) \quad (3.33)$$

e

(3.34)

se la regione di integrazione contiene il punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

Prendiamo ora in considerazione il caso che il campo elettrico sia generato da una carica puntiforme q posta in un punto P_0 individuato dal vettore $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$.

Questa carica puntiforme può essere descritta, tramite la funzione delta, come una densità di carica volumetrica:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.35)$$

dovunque nulla eccetto che nel punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

Il calcolo del potenziale, può allora essere eseguito risolvendo l'equazione di Poisson ove si ponga per $\rho(\mathbf{r})$ la (3.35). Pertanto la sua soluzione sarà data dalla (3.6), che sostituendo a $\rho(\mathbf{r}')$ la densità di carica (3.35), diviene:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.36)$$

essendo l'integrale esteso a un volume V qualsiasi contenente il punto P_0 . Questo integrale, tenendo conto della (3.34) e facendo attenzione al fatto che la variabile di integrazione è ora quella primata, è facilmente risolvibile e fornisce come risultato:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.37)$$

che è infatti l'espressione del potenziale di una carica puntiforme, introdotto precedentemente in maniera più elementare.

Il procedimento qui seguito per il caso della carica puntiforme può essere esteso in forma opportuna anche a quello di una densità di carica lineare o superficiale. Appare in tal modo più giustificata l'affermazione che l'integrale (3.6) rappresenti la soluzione dell'equazione di Poisson *qualunque sia la distribuzione di carica*, in assenza tuttavia di condizioni al contorno.

Il procedimento illustrato per una carica puntiforme, può immediatamente essere generalizzato per il caso di una distribuzione di un certo numero finito N di cariche puntiformi.

3.6 Metodo delle cariche immagini

In alcuni problemi di elettrostatica, concernenti cariche puntiformi in presenza di condizioni al contorno, cioè di superficie conduttrici, è possibile determinare il potenziale senza dover risolvere una equazione differenziale per mezzo del cosiddetto *metodo delle cariche immagini*.

Il metodo consiste nel sostituire il conduttore con una opportuna distribuzione di cariche, dette *cariche immagini*, situate in modo che la superficie geometrica occupata dal conduttore risulti ancora una superficie equipotenziale con valore del potenziale immutato. Per l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con determinate condizioni al contorno possiamo affermare che il potenziale generato dal sistema cariche puntiformi più cariche immagini coincide, nella regione esterna al conduttore, con il potenziale generato dal sistema effettivo cariche puntiformi con le condizioni al contorno assegnate. Le cariche immagini devono essere localizzate all'esterno della regione nella quale si vuole determinare il potenziale, perché quest'ultimo deve sempre soddisfare all'equazione di Laplace e i punti ove sono poste le cariche immagini rappresentano punti di singolarità.

a) Carica puntiforme e piano conduttore infinito

Come primo esempio di applicazione del metodo delle immagini consideriamo una carica puntiforme $+q$ ad una distanza d da un piano conduttore S infinitamente esteso e posto a potenziale zero. Il problema consiste nel determinare il potenziale $\varphi(x, y, z)$ nel semispazio contenente la carica $+q$.

È immediato verificare che la superficie geometrica occupata dal conduttore è ancora una superficie equipotenziale con valore nullo del potenziale, qualora si ponga una carica immagine $-q$ speculare della carica $+q$ rispetto al piano S , come mostrato in Fig. 3.2.

Infatti il potenziale generato dalle cariche $+q$ e $-q$ in un punto arbitrario P di coordinate x, y, z rispetto all'origine O , è dato da:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right) \quad (3.38)$$

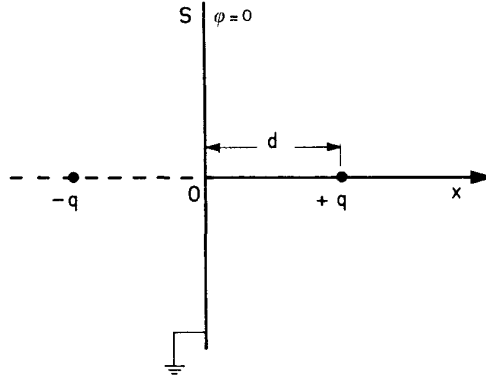


FIG. 3.2-Carica puntiforme $+q$ affacciata ad un piano conduttore tenuto a potenziale nullo. La carica $+q$ e la sua immagine $-q$ rendono il piano S equipotenziale con $\varphi = 0$.

e tale potenziale è nullo per tutti i punti del piano S per i quali è $x = 0$. Pertanto il problema di determinare nel semispazio a destra il potenziale dovuto al sistema carica puntiforme e piano conduttore S può essere risolto calcolando il potenziale creato nello stesso semispazio dal sistema carica puntiforme $+q$ e carica immagine $-q$. La relazione (3.38) rappresenta quindi la soluzione del problema.

Determiniamo ora la densità superficiale di carica indotta sul piano S dalla carica puntiforme $+q$. A questo scopo ricaviamo la componente normale al piano conduttore del campo elettrico \mathbf{E} ; questa è data da:

$$E_x(0, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.39)$$

Per il teorema di Coulomb la densità superficiale di carica risulta essere:

$$\sigma = \epsilon_0 E_x = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.40)$$

Integrando la densità σ su tutta la superficie S , operando l'opportuno cambiamento di variabile $(y^2 + z^2)^{1/2} = r$ e suddividendo il piano in corone circolari centrate in O di area $da = 2\pi r dr$, si ha:

$$\int_S \sigma da = \int_0^\infty -\frac{qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{3/2}} 2\pi r dr = -q. \quad (3.41)$$

La carica totale indotta sulla superficie conduttrice S è quindi uguale in valore e di segno opposto alla carica puntiforme $+q$. Questo risultato era prevedibile

tenendo conto del fatto che il problema in questione rappresenta un esempio di induzione completa, dato che tutte le linee di forza uscenti dalla carica $+q$ sono intercettate dalla superficie conduttrice S .

b) *Carica puntiforme e sfera conduttrice*

Un esempio più complesso di applicazione del metodo delle immagini è quello del calcolo del potenziale generato da una carica puntiforme in presenza di una sfera conduttrice collegata a terra, cioè a potenziale zero.

Sia data una sfera conduttrice di raggio R ed una carica puntiforme q posta ad una distanza a dal centro O della sfera. Il calcolo del potenziale prodotto da un tale sistema può essere ottenuto risolvendo il problema del potenziale generato dalla carica q e da una opportuna carica immagine q' . Questa carica dovrà essere situata, per quanto detto all'inizio di questo paragrafo, all'interno della superficie sferica di raggio R centrata in O e per ragioni di simmetria sulla retta congiungente la carica q ed il punto O come mostrato in Fig. 3.3. Il valore della carica q' e la sua distanza b dal punto O andranno determinati in modo che il potenziale generato sulla superficie sferica da q a q' sia nullo. Utilizzando coordinate sferiche con centro in O , il potenziale $\varphi(r, \vartheta, \phi)$ prodotto in un punto P distante r_1 da q ed r_2 da q' è:

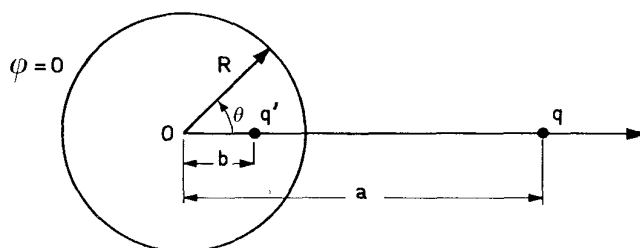


FIG. 3.3 - Applicazione del metodo delle immagini al caso di una carica puntiforme q in presenza di una superficie sferica conduttrice con potenziale nullo.

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (3.42)$$

Se il punto P giace sulla superficie sferica di raggio R la (3.42) può essere scritta nella forma:

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta)^{1/2}} + \frac{q'}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \vartheta)^{1/2}} \right] \quad (3.43)$$

e questa quantità è nulla per qualunque valore di ϑ solo se i due denominatori sono funzioni simili di ϑ . Questo è possibile se noi scegliamo

$$\frac{b}{R} = \frac{R}{a}. \text{ Avremo allora:}$$

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + \left(\frac{a}{R}\right)q'}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta)^{1/2}} \quad (3.44)$$

$$q' = -\left(\frac{R}{a}\right)q.$$

che si annulla se

Concludiamo così che il calcolo del potenziale generato dal sistema carica q e sfera conduttrice con potenziale nullo può essere eseguito considerando, anziché il sistema effettivo, quello costituito dalla carica q e da una carica immagine q' di

grandezza uguale a $-\frac{R}{a}q$ posta ad una distanza $b = \frac{R^2}{a}$ dal centro della sfera. Si

può dimostrare, eseguendo l'integrale sulla superficie della sfera della densità di carica indotta, che la carica totale su di essa è uguale alla carica immagine q' . Nel caso in cui la sfera conduttrice sia isolata e carica, per cui il suo potenziale risulti uguale a un valore φ_0 assegnato, è possibile ancora determinare il potenziale nei vari punti dello spazio esterni alla sfera col metodo delle cariche immagini. Basterà porre una seconda carica immagine di valore q'' al centro della sfera. Il potenziale della superficie sferica sarà allora la somma del potenziale $\varphi = 0$ del

problema precedente più il potenziale $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R}$

generato dalla nuova carica immagine q'' ; la carica totale distribuita sulla sfera risulterà essere $q' + q''$. Il valore di q'' deve essere tale da rendere il potenziale della sfera uguale al valore assegnato φ_0 . Prendendo $q'' = -q'$ può essere risolto il caso particolare relativo alla sfera conduttrice isolata scarica.

3.7 Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cartesiane

Le equazioni di Laplace e di Poisson, essendo equazioni differenziali alle derivate parziali, presentano in genere notevoli difficoltà di soluzione. Tenendo conto delle considerazioni fatte all'inizio del paragrafo 3.4, ci limiteremo a risolvere in alcuni casi l'equazione di Laplace, trattando cioè problemi in regioni dello spazio dove non vi siano cariche. La presenza di conduttori carichi fornirà le condizioni al contorno per le soluzioni dell'equazione.

Cerchiamo innanzitutto una soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate cartesiane, utilizzando il metodo della separazione delle variabili; tale metodo consiste nel ridurre l'equazione data in tre equazioni, in ognuna delle quali compaia soltanto una delle tre variabili. L'equazione di Laplace, in coordinate cartesiane ortogonali, assume la forma:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.45)$$

Poniamo ora

$$\varphi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z); \quad (3.46)$$

sostituendo nella (3.45) si ottiene

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (3.47)$$

$$XYZ \sim \backslash$$

e dividendo per XYZ si ha:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (3.48)$$

La (3.48) deve essere valida per qualunque valore delle variabili indipendenti x, y, z . Essendo i tre termini funzioni rispettivamente della sola x , della sola y e della sola z , dovranno valere le equazioni:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_z^2 \quad (3.49)$$

dove le costanti k_x^2, k_y^2, k_z^2 devono soddisfare la condizione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0. \quad (3.50)$$

Dalla (3.50) appare l'impossibilità per le costanti k_x, k_y, k_z di assumere tutte valori reali o valori immaginari. Risolviamo la prima delle (3.49):

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2 X. \quad (3.51)$$

Per k_x reale non nullo, la soluzione generale è data da:

$$X = Ae^{k_x x} + Be^{-k_x x} \quad (3.52)$$

Per k_x immaginario non nullo, (3.51) diviene:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x'^2 X \quad (3.53)$$

per cui, dovendo il potenziale essere una funzione reale, l'integrale generale può essere scritto:

$$X = A \sin k'_x x + B \cos k'_x x. \quad (3.54)$$

Infine per $k_x = 0$, si ottiene come soluzione l'espressione:

$$X = A_0 x + B_0. \quad (3.55)$$

Quanto detto per la funzione X può essere ripetuto per le funzioni Y e Z , con l'avvertenza che la condizione (3.50) implica, nel caso in cui tutte e tre le costanti siano diverse da zero, che vi sia una soluzione parziale del tipo (3.52), cioè esponenziale, corrispondente ad un valore reale di una delle costanti, una soluzione del tipo (3.54), cioè trigonometrica, in corrispondenza di un valore immaginario della costante, ed una soluzione dell'uno o dell'altro tipo.

Se una delle costanti è nulla, avremo una soluzione lineare, una esponenziale ed una trigonometrica.

Una soluzione completa, nel caso di costn genere:

$$\varphi(x, y, z) = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) (C \sin k_y y + D \cos k_y y) (E e^{-(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} z} + F e^{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} z})$$

il valore delle costanti dipendendo ovviamente dal tipo di problema, cioè dal tipo di condizioni al contorno da soddisfare.

Applicheremo ora quanto esposto al calcolo del potenziale elettrostatico in alcuni casi.

a) Caso monodimensionale

Supporremo che le condizioni al contorno siano del tipo di Dirichlet.

Dati due conduttori piani 1 e 2, affacciati, indefinitamente estesi, posti a distanza d , tenuti rispettivamente ai potenziali φ_1 e φ_2 con $\varphi_1 > \varphi_2$, calcoliamo in tutto lo spazio il valore del potenziale e del campo elettrico, nonché la distribuzione di carica superficiale sui due conduttori. Assumiamo un sistema di assi cartesiani con l'asse x orientato normalmente ai due piani, che risultano essere paralleli al piano yz ; l'origine degli assi sia posta in un punto del piano conduttore 1. Poiché la funzione potenziale dipende chiaramente solo dalla coordinata x , l'equazione di Laplace si riduce alla forma $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$ Siamo cioè nel

caso: $\frac{d}{dy} = \frac{d}{dz} = 0$, $K_x = 0$; la soluzione è allora data dalla (3.55)

$$\varphi(x) = A_0 x + B_0 \quad (3.57)$$

dove A_0 e B_0 sono due costanti da determinare imponendo le condizioni al contorno rappresentate dai valori φ_1 e φ_2 assunti dal potenziale sui due piani conduttori.

Per $x = 0$ dovrà verificarsi che :

$$\varphi(0) = \varphi_1 = B_0 \quad (3.58)$$

e per $x = d$ dovrà essere :

$$\varphi(d) = \varphi_2 = A_0 d + B_0 \quad (3.59)$$

Da queste relazioni si ricava che $B_0 = \varphi_1$ e $A_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$. L'espressione del potenziale risulta essere in definitiva la seguente:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} x + \varphi_1 \quad (3.60)$$

Tale soluzione è valida solo per valori di x compresi tra 0 e d . Nelle zone esterne ai due piani, che essendo i piani infiniti possono essere considerate come regioni interne di conduttori, il potenziale è uniforme e uguale al valore che si ha sul piano corrispondente. L'andamento del potenziale è quello mostrato in Fig. 3.4

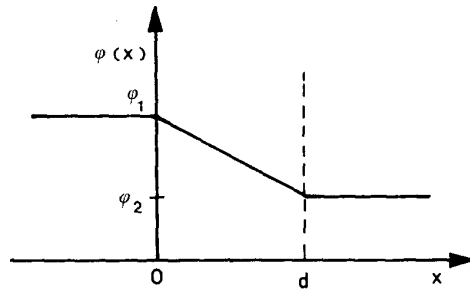


Fig. 3.4 - Andamento del potenziale elettrico generato da due piani conduttori carichi infinitamente estesi posti nei punti $x = 0$ ed $x = d$.

Il campo elettrico viene determinato applicando alla relazione (3.60) l'operatore gradiente e cambiando di segno; tenendo conto che il potenziale dipende solo dalla variabile x , abbiamo:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \mathbf{i} \quad (3.61)$$

La direzione del campo elettrico è quella che va dal piano a potenziale maggiore a quello a potenziale minore. Si può notare inoltre come il campo elettrico all'interno dei piani conduttori sia uniforme e come esso sia nullo all'esterno di detti piani. La densità superficiale di carica dei piani conduttori può essere ricavata utilizzando il teorema di Coulomb:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \epsilon_0 \quad (3.62)$$

Il valore del modulo della densità di carica σ è lo stesso sui due piani, mentre il segno è positivo o negativo a seconda che la direzione del campo elettrico sia quella uscente o quella entrante rispetto al piano considerato.

b) Caso bidimensionale

Il potenziale sarà funzionale solo di x e di y .

L'equazione di Laplace si scrive pertanto:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.63)$$

Sia inoltre data la seguente condizione al contorno: sul piano $y = 0$, si abbia

$$\varphi = \varphi_0 \cos \beta x. \quad (3.64)$$

Essendo φ indipendente da z e $k_z = 0$, conservando le stesse notazioni della (3.46) avremo $Z = A_0 z + B_0$, ma, non dovendo φ dipendere dalla variabile z , possiamo prendere $A_0 = 0$, $B_0 = 1$ (scelta arbitraria).

Inoltre la (3.64) suggerisce per X una soluzione della forma:

$$X = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad (3.65)$$

e di conseguenza $k_x = \beta$, $-k_x^2 + k_y^2 = -\beta^2 + k_y^2 = 0$, $k_y = \pm \beta$

La soluzione completa sarà allora della forma:

$$\varphi = (A \sin \beta x + B \cos \beta x) (C e^{\beta y} + D e^{-\beta y}) \quad (3.66)$$

Le condizioni al contorno richiedono che φ si annulli all'infinito. Deve quindi essere, per $y > 0$, $C = 0$. Infine la condizione su $y = 0$ richiede che si operi la scelta $A=0$, $B = \varphi_0$, $D = 1$.

Possiamo allora scrivere, per $y \geq 0$, la soluzione:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \beta x e^{-\beta y} \quad (y \geq 0)$$

per $y < 0$ è necessario assumere $C = 1$ e $D = 0$, onde la soluzione è:

$$\varphi = \varphi_0 e^{\beta y} \cos \beta x \quad (y < 0).$$

3.8 Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche

Assumiamo un sistema di coordinate sferiche come mostrato in Fig. 3.5.

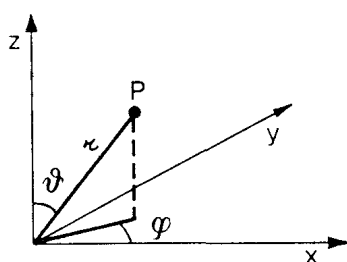


FIG. 3.5 - Sistema di coordinate sferiche

L'equazione di Laplace in coordinate sferiche si scrive:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(r, \vartheta, \phi) = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Cerchiamo una soluzione con il procedimento della separazione di variabili, ponendo cioè:

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = R(r) P(\vartheta) Z(\phi).$$

(3.68)

Dividendo per RPZ e moltiplicando per $r^2 \sin^2 \vartheta$ si ottiene:

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\phi^2} = 0; \quad (3.69)$$

i primi due termini della (3.69) sono funzionali solo di ϑ e di Z , mentre l'ultimo termine è funzione di ϕ .

Devono quindi valere le relazioni:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\phi^2} = -m^2 \quad (3.70)$$

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) = m^2. \quad (3.71)$$

Quest'ultima, dividendo per $\sin^2 \vartheta$, si può scrivere :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = 0 \quad (3.72)$$

dove il primo termine è funzione della sola r , e gli ultimi due della sola ϑ .

Le soluzioni della (3.70) nel caso di m reale o nullo sono date da:

$$\begin{aligned} Z &= A \sin m\phi + B \cos m\phi & (m \neq 0) \\ Z &= G\phi + H & (m = 0) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Consideriamo dapprima il caso $m = 0$. Dalla (3.72) si ottiene:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right). \quad (3.74)$$

Essendo i due membri della (3.74) rispettivamente funzioni soltanto di r e di ϑ , è possibile eguagliare entrambi ad una costante n di separazione. L'equazione in ϑ diviene:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + nP = 0. \quad (3.75)$$

Per la risoluzione di questa equazione, detta di Legendre, rimandiamo ai testi di analisi matematica. Ci limitiamo qui a dire che esistono soluzioni fisicamente accettabili, cioè regolari in $\vartheta = 0$ e in $\vartheta = \pi$ per valori di n dati da $n = l(l+1)$ con l intero reale.

Le soluzioni di questo tipo sono dei polinomi in $\cos \vartheta$ e sono indicate come polinomi di Legendre, $P_l(\vartheta)$. I primi tre polinomi sono i seguenti:

$$l=0 \quad P_0(\vartheta)=1$$

$$l=1 \quad P_1(\vartheta) = \cos \vartheta$$

$$l=2 \quad P_2(\vartheta) = \frac{1}{3}(3\cos^2 \vartheta - 1)$$

L'equazione radiale si può scrivere:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1) R = 0. \quad (3.76)$$

Le soluzioni si ottengono con la posizione $R = r^n$. Sostituendo nella (3.76) si trovano le due radici indipendenti:

$$R_l = r^l \quad R_l = r^{-(l+1)}. \quad (3.77)$$

Possiamo quindi concludere che le soluzioni dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche sono del tipo:

$$\varphi_l = r^l P_l(\cos \vartheta) \quad \varphi_l = r^{-(l+1)} P_l(\cos \vartheta)$$

e, valendo il teorema di sovrapposizione, si può esprimere una soluzione generica nella forma:

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta) (C \phi + D). \quad (3.78)$$

Le funzioni $r^l P_l(\cos \vartheta)$ sono dette armoniche zonali.

Torniamo al caso generale, con m diverso da zero.

L'equazione in ϑ diviene:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P = 0 \quad (3.79)$$

le cui soluzioni sono le cosiddette funzioni associate di Legendre di prima e seconda specie:

$$P = C_l P_l^m(\cos \vartheta) + D_l Q_l^m(\cos \vartheta). \quad (3.80)$$

Una soluzione completa dell'equazione di Laplace si può quindi scrivere, utilizzando il teorema di sovrapposizione,

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l, m} (E_l r^l + F_l r^{-(l+1)}) (C_l P_l^m + D_l Q_l^m) (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \quad (3.81)$$

Come esempio di soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche, consideriamo dapprima il caso elementare relativo al *problema di due superfici conduttrici sferiche concentriche* di raggi R_1 e R_2 con $R_1 < R_2$ tenute rispettivamente ai potenziali φ_1 e φ_2 , con $\varphi_1 > \varphi_2$.

Tenendo conto che il potenziale dipende solo dalle coordinate radiale r , la (3.67) diviene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (3.82)$$

Le costanti F_0 ed E_0 possono essere determinate imponendo le condizioni al contorno e le soluzioni sono date da una combinazione lineare delle (3.77) con $l = 0$, cioè

$$\varphi(r) = \frac{F_0}{r} + E_0 \quad (3.83)$$

contorno.

Per la regione compresa tra le due superficie, imponendo le condizioni al contorno sui due conduttori, si ricava la seguente espressione del potenziale:

$$\varphi(r) = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r} + \frac{R_2 \varphi_2 - R_1 \varphi_1}{R_2 - R_1}. \quad (3.84)$$

Nella regione interna alla sfera di raggio R_1 il potenziale è uniforme e vale φ_1 . Per la regione esterna alla sfera di raggio R_2 la soluzione dell'equazione di Laplace viene determinata prendendo come condizioni al contorno il potenziale φ_2 della sfera di raggio R_2 e le condizioni normali relative al comportamento all'infinito del potenziale. Avremo così che per $r \geq R_2$ il potenziale vale:

$$\varphi(r) = \frac{R_2}{r} \varphi_2. \quad (3.85)$$

Utilizzando la relazione $E = -\text{grad } \varphi$ e la (3.84), si trova che il campo elettrico nella regione tra le due superficie sferiche è:

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.86)$$

Applicando il teorema di Coulomb possiamo inoltre calcolare le densità superficiali di carica:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \varepsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{R_2}{R_1 (R_2 - R_1)} \\ \sigma_2 &= -\varepsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{R_1}{R_2 (R_2 - R_1)}.\end{aligned}\quad (3.87)$$

È facile controllare che, a parte il segno, la quantità di carica sulle due superficie sferiche affacciate è la stessa.

Consideriamo, come secondo esempio, il caso di un *conduttore sferico di raggio R posto in un campo elettrico uniforme E_0* . La presenza del conduttore, su cui avviene il fenomeno dell'induzione, altera le linee di forza del campo, inizialmente parallele, in modo che esso risulti nullo, all'equilibrio, in ogni punto del conduttore stesso. Prendiamo l'asse z coincidente con la direzione iniziale delle linee del campo e prendiamo l'origine al centro della sfera. Il potenziale è indipendente, per simmetria, dalla coordinata ϕ . Sia φ_0 il potenziale del conduttore. Dobbiamo cercare una funzione φ che coincida con φ_0 per $r = R$. La soluzione sarà del tipo (3.78), cioè:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \vartheta) &= \sum_l (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta) = \\ &= a_0 + b_0 r^{-1} + a_1 r \cos \vartheta + b_1 r^{-2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} a_2 r^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \\ &\quad + \frac{1}{2} b_2 r^{-3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots\end{aligned}\quad (3.88)$$

con a_l, b_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) costanti arbitrarie da determinarsi mediante le condizioni al contorno.

Per r tendente all'infinito, il campo sarà quello imperturbato E_0 e quindi:

$$\varphi(r, \vartheta)|_{\infty} = -E_0 z + \text{costante} = -E_0 r \cos \vartheta + \text{costante} \quad (3.89)$$

ciò richiede che nella (3.88) $a_1 = -E_0$ e che tutte le costanti a_l con $l > 1$ debbano essere nulle.

Il termine $b_0 r^{-1}$, producendo un campo radiale, può essere presente solo in caso di conduttore sferico con carica netta, e quindi nel problema in discussione deve essere $b_0 = 0$.

Deve inoltre valere la condizione:

$$\varphi(R, \vartheta) = \varphi_0, \quad (3.90)$$

cioè il potenziale non deve dipendere da ϑ sulla superficie della sfera. Poiché ciò sia verificato, devono essere nulle tutte le costanti b_i con $i \geq 2$, dato che i termini corrispondenti non possono bilanciarsi per soddisfare la (3.90).

Si ha dunque:

$$\varphi(r, \vartheta) = a_0 - E_0 r \cos \vartheta + b_1 r^{-2} \cos \vartheta \quad (3.91)$$

$$) \quad \varphi(r, \vartheta) = \varphi_0$$

il che implica

$$a_0 = \varphi_0 \quad b_1 = E_0 R^3$$

Il campo è quindi dato dalle espressioni, valide per $r \geq R$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \vartheta$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \vartheta .$$

3.9 Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche

Assumiamo un sistema di coordinate cilindriche come mostrato in Fig. 3.6.

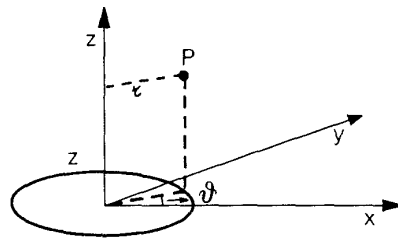


FIG. 3.6 - Sistema di coordinate cilindriche.

L'equazione di Laplace assume la forma:

$$\nabla^2 \varphi(r, \vartheta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 . \quad (3.92)$$

Ricerchiamo soluzioni del tipo:

$$\varphi(r, \vartheta, z) = R(r)P(\vartheta)Z(z) . \quad (3.93)$$

Sostituendo nella (3.92) e moltiplicando per $\frac{r^2}{R^2 Z}$ si ottiene:

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 ; \quad (3.94)$$

il secondo termine, dovendo dipendere solo da ϑ , può essere posto eguale ad una costante, che sarà anche eguale, a meno del segno, alla somma del primo e del terzo termine.

Ponendo :

$$\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\vartheta^2} = -n^2 \quad (3.95)$$

la (3.94) diviene:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 . \quad (3.96)$$

Ponendo :

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \quad (3.97)$$

si ottiene:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 . \quad (3.98)$$

Operando la sostituzione $t = kr$, la (3.98) diviene:

$$\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(t \frac{dR}{dt} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2} \right) R = 0 . \quad (3.99)$$

La (3.99) è detta equazione di Bessel ed ha come soluzione:

$$R_n(kr) = A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr) . \quad (3.100)$$

Le J_n sono funzioni di tipo sinusoidale con ampiezza decrescente e periodo a lenta variazione. Le N_n sono funzioni divergenti nell'origine. Entrambe tendono a zero per kr tendente a infinito. La soluzione della (3.97) è data, per k reale, da funzioni esponenziali. La (3.95), equazione per ϑ , ha per n reale soluzioni trigonometriche. Per n e k reali gli integrali sono della forma:

$$\begin{aligned}
R_n(r) &= A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr) & k \neq 0 \\
R_n(r) &= A r^n + B r^{-n} & k = 0 \\
P_n(\vartheta) &= C_n \cos n\vartheta + D_n \sin n\vartheta & n \neq 0 \\
P_n(\vartheta) &= C \vartheta + D & n = 0 \\
Z_k(z) &= E_k e^{kz} + F_k e^{-kz} & k \neq 0 \\
Z(z) &= E z + F & k = 0
\end{aligned}
\tag{3.101}$$

Se n e k sono entrambi nulli, la (3.98) ha come soluzione

$$R(r) = A \ln r + B \tag{3.102}$$

e la soluzione si può scrivere:

$$\varphi(r, \vartheta, z) = (A \ln r + B)(C \vartheta + D)(Ez + F). \tag{3.103}$$

Come esempio elementare prendiamo in esame il caso di due superfici conduttrici cilindriche infinite coassiali di raggio R_1 e R_2 con $R_1 < R_2$, tenute ai potenziali fissi φ_1 e φ_2 , con $\varphi_1 > \varphi_2$

Il potenziale è funzione solo di r , e la soluzione è data dalla (3.102), cioè

$$\varphi(r) = A \ln r + B. \tag{3.103}$$

Imponendo le condizioni al contorno sulle due superfici cilindriche determiniamo le due costanti A e B e otteniamo così che il potenziale, per $R_1 \leq r \leq R_2$, è:

$$\varphi(r) = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\log R_2/R_1} \log r + \frac{\varphi_1 \log R_2 - \varphi_2 \log R_1}{\log R_2 - \log R_1}. \tag{3.104}$$

Calcolando poi il gradiente della (3.104) e cambiando di segno troviamo l'espressione del campo elettrico:

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\log R_2/R_1} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \tag{3.105}$$

e utilizzando, come negli esempi precedenti, il teorema di Coulomb ricaviamo per le densità superficiali di carica rispettivamente i valori:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\log R_2/R_1} \frac{\varepsilon_0}{R_1} \\
\sigma_2 &= -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\log R_2/R_1} \frac{\varepsilon_0}{R_2}.
\end{aligned}
\tag{3.106}$$

3.10 Relazione tra cariche e potenziali di un sistema di n conduttori

Qualora si abbia a che fare con un sistema di n conduttori di forma del tutto generica la possibilità di trovare una soluzione dell'equazione di Laplace è limitata in pratica dalla complessità matematica del problema. Tuttavia, utilizzando il teorema dell'unicità della soluzione della equazione di Laplace soddisfacente a determinate condizioni al contorno e il principio di sovrapposizione per il potenziale, dimostreremo che è possibile ottenere una relazione che lega la quantità di carica posseduta da ogni conduttore con i potenziali ai quali gli stessi conduttori sono posti.

Dato un sistema di « conduttori, la soluzione $\varphi(x, y, z)$ dell'equazione di Laplace che assume sulle superficie S_1, S_2, \dots, S_n dei conduttori i valori assegnati dei potenziali $\varphi_{S1}, \varphi_{S2}, \dots, \varphi_{Sn}$ è univocamente determinata. Ugualmente determinati saranno di conseguenza il valore del campo elettrico in ogni punto dello spazio e la quantità di carica posseduta da ogni conduttore.

Per chiarire come si procede, incominciamo con l'affrontare il caso semplice in cui solo il potenziale dello i -esimo conduttore sia diverso da zero ed uguale ad φ_{Si} e tutti gli altri invece siano uguali a zero. Anche in questo caso la soluzione dell'equazione di Laplace che assume i corrispondenti valori al contorno, indicata con $\varphi^i(x, y, z)$, è unica.

Risulta evidente inoltre che, raddoppiando il potenziale dell' i -esimo conduttore, il potenziale raddoppierà in ogni punto dello spazio e lo stesso accadrà per il campo elettrico. Applicando il teorema di Coulomb si ricava che anche la quantità di carica posseduta da ognuno degli altri conduttori raddoppierà. Si deduce quindi che la quantità di carica di ogni conduttore è proporzionale al potenziale dell' i -esimo conduttore:

$$q_k = a_{ki} \varphi_{Si}. \quad (3.107)$$

Passiamo ora al caso in cui i conduttori tenuti a potenziale diverso da zero siano due, per esempio l' i -esimo e il j -esimo mentre tutti gli altri siano a potenziale nullo. Per la linearità dell'equazione di Laplace la funzione potenziale soluzione di questo problema, $\varphi^{ij}(x, y, z)$, sarà la sovrapposizione delle soluzioni dei due problemi relativi ad uno solo dei due conduttori con potenziale diverso da zero; cioè:

$$\varphi^{ij}(x, y, z) = \varphi^i(x, y, z) + \varphi^j(x, y, z). \quad (3.108)$$

Infatti la (3.108) soddisfa l'equazione di Laplace ed assume il valore φ_{Si} sull' i -esimo conduttore, φ_{Sj} sul j -esimo e zero su tutti gli altri. È allora immediato ricavare che la carica di ogni conduttore è legata ai potenziali dei due conduttori della relazione:

$$q_k = a_{ki} \varphi_{Si} + a_{kj} \varphi_{Sj}. \quad (3.109)$$

essendo a_{ki} e a_{kj} dei coefficienti numerici.

Generalizzando al caso in cui tutti i conduttori siano posti ai potenziali generici $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, sempre per il principio di sovrapposizione, potremo scrivere che:

$$q_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} \varphi_{S_i}. \quad (3.110)$$

I coefficienti a_{ki} per $k \neq i$ prendono il nome di *coefficienti di induzione* e per $k = i$ di *coefficienti di capacità*.

Essi dipendono solamente dalla posizione, forma e grandezza dei conduttori considerati nel problema; inoltre è possibile dimostrare che per essi vale la relazione $a_{ki} = a_{ik}^{1)}$.

Se il sistema di equazione (3.110) viene risolto rispetto alle φ_{S_i} si ottiene:

$$\varphi_{S_i} = \sum_{k=1}^n p_{ik} q_k. \quad (3.111)$$

I coefficienti p_{ik} , che compaiono nella (3.111), chiamati *coefficienti di potenziale* risultano essere uguali ad A_{ik}/A , dove A è il determinante delle a_{ik} ed A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} . Da un punto di vista fisico risulta chiaro che il determinante A debba essere diverso da zero perché, dato un certo sistema di cariche q_k poste sui conduttori, il potenziale a cui questi si portano deve essere univocamente definito: è pertanto soddisfatta la condizione che permette il passaggio dalla (3.110) alla (3.111).

3.11 Capacità di un conduttore. - Il condensatore

Carichiamo con una certa quantità di carica q un conduttore isolato nello spazio; il conduttore assumerà un certo valore del potenziale φ . Aumentando la carica nel conduttore di un fattore A , il potenziale aumenterà corrispondentemente dello stesso fattore. Risulterà così che il rapporto tra la quantità di carica posseduta da un conduttore ed il potenziale che esso acquista per la presenza di questa carica è una caratteristica di ogni singolo conduttore e dipende solo dalla sua geometria. In altre parole:

$$q = C \varphi. \quad (3.112)$$

La costante di proporzionalità C viene chiamata *capacità* del conduttore. Va notato che la capacità C di un conduttore isolato non coincide con il coefficiente di capacità definito nel paragrafo precedente, che dipende dalla presenza di altri corpi conduttori.

Nel sistema MKS la capacità viene misurata in coulomb/volt, quantità che

prende il nome di farad $\left(1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}\right)$

¹⁾ Vedi per esempio: «Introduzione alla Fisica Matematica» di E. Persico pag. 132.

Le capacità dei normali conduttori in generale sono molto più piccole di un farad cosicch  comunemente si fa uso di sottomultipli del farad come il microfarad (μF) pari a 10^{-6} farad e il micromicrofarad o picofarad ($\mu\mu\text{F}$) pari a 10^{-12} farad.

Il calcolo della capacit  di un conduttore presenta difficolt  notevoli a meno che non si tratti di casi con geometria molto semplice. Calcoliamo per esempio la capacit  di una sfera conduttrice isolata di raggio R sulla superficie S della quale sia distribuita una quantit  di carica q .

Poich  il volume occupato da un conduttore   equipotenziale, eseguiamo il calcolo del potenziale al centro della sfera. La densit  superficiale di carica   $\sigma = q/4\pi R^2$   quindi il potenziale risulta essere :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{q}{4\pi R^2} \frac{da}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3.113)$$

Da questo deduciamo che la capacit  della sfera conduttrice isolata  :

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (3.114)$$

Utilizzando la (3.114) si vede che per una sfera di raggio pari ad 1 metro la capacit    di circa 10^{-10} farad.

Consideriamo ora un conduttore isolato sul quale sia distribuita una certa quantit  di carica; esso assumer  un determinato valore del potenziale. Se avviciniamo al primo un secondo conduttore scarico collegato a terra quest'ultimo subir  il fenomeno dell'induzione elettrostatica caricandosi di cariche di segno opposto. Il potenziale, per la presenza di queste cariche indotte, varier  in tutti i punti dello spazio. Esso diminuir  sulla superficie del primo conduttore e, poich  la quantit  di carica   rimasta invariata, la sua capacit  risulter  aumentata. Questo esempio suggerisce pertanto la possibilit  di aumentare la capacit  di un conduttore ponendo nelle sue vicinanze un altro conduttore.

Il sistema formato da due conduttori adiacenti, isolati, carichi con cariche di valore uguale ma di segno opposto e tali da subire la medesima influenza da parte di altri conduttori carichi presenti, prende il nome di *condensatore*. Richiedere che altri conduttori presenti influiscano in maniera analoga significa richiedere che essi producano sui due componenti del condensatore lo stesso potenziale. Questa condizione pu  essere soddisfatta solo se uno dei due conduttori costituenti il condensatore schermo completamente il secondo. I due conduttori prendono il nome di piatti o armature del condensatore. Il valore assoluto della carica immagazzinata da uno dei due conduttori viene chiamata *carica del condensatore*.   ovvio per  che la quantit  di carica netta totale del condensatore   nulla. Caricare un condensatore significa creare tra le armature una determinata differenza di potenziale facendo in modo che sui due conduttori siano distribuite cariche di valore uguale ma di segno opposto.

Indichiamo con $+q$ e $-q$ le cariche poste sui due conduttori isolati e rispettivamente con q_1 e q_2 i potenziali del primo e del secondo conduttore. Per la relazione (3.111) possiamo scrivere che:

$$\varphi_1 = p_{11}q - p_{12}q \quad (3.115)$$

$$\varphi_2 = p_{21}q - p_{22}q$$

Sottraendo la seconda espressione alla prima e tenendo conto che $p_{12} = p_{21}$ otteniamo :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12}) q. \quad (3.116)$$

Dalla (3.116) risulta che la differenza di potenziale tra le armature è direttamente proporzionale alla quantità di carica da essa posseduta. Se poniamo:

$$C = \frac{1}{(p_{11} + p_{22} - 2p_{12})} \quad (3.117)$$

potremo scrivere la (3.116) nella forma:

$$q = C \Delta\varphi. \quad (3.118)$$

La costante di proporzionalità C prende il nome di *capacità del condensatore* ed è una quantità che, come risulta evidente dalla (3.117), dipende solo dalla forma e dalla disposizione relativa dei due conduttori; essa rappresenta la quantità di carica immagazzinata per unità di differenza di potenziale. Il condensatore è quindi uno strumento in grado di accumulare una quantità di carica tanto maggiore, per una fissata differenza di potenziale, quanto più grande è la sua capacità.

a) Condensatore a piatti paralleli.

Determiniamo il valore della capacità di un condensatore formato da due piani conduttori paralleli affacciati. Sia q la carica del condensatore, d la distanza tra i due piani ed S la loro superficie. Se la lunghezza d è molto più piccola delle dimensioni lineari delle armature potremo considerare il sistema come formato da due piani indefiniti ed utilizzare le espressioni del paragrafo 3.7 per ricavare la relazione di proporzionalità tra carica del condensatore e differenza di potenziale tra i due conduttori. In questo limite abbiamo che la densità di carica superficiale sui piatti può essere considerata uniforme ed uguale a $\sigma = q/S$. Indicando con φ_1 e φ_2 i potenziali dei due conduttori, tramite la (3.62) possiamo scrivere:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d} \varepsilon_0 \quad (3.119)$$

da cui:

$$q = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (3.120)$$

Confrontando la (3.120) con la (3.118) troviamo che la capacità del condensatore a piatti paralleli è:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (3.121)$$

Questo risultato è stato ottenuto considerando i piatti del condensatore come piani conduttori indefiniti e assumendo quindi che il campo elettrico nella regione tra essi compresa fosse uniforme. Nel caso di un condensatore reale tuttavia la densità di carica non è distribuita uniformemente ma risulta maggiore verso i bordi dei conduttori. Il campo elettrico in questa regione pertanto non è né uniforme né perpendicolare alle superficie conduttrici («effetto ai bordi», Fig. 3.7.).

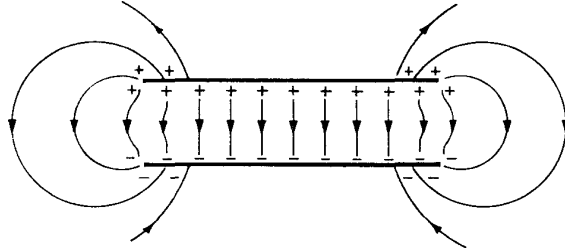


FIG. 3.7 - Linee di forza del campo elettrico tra le armature di un condensatore piano. È visibile l'effetto ai bordi.

È possibile dimostrare che per una fissata differenza di potenziale tra i conduttori del condensatore reale la capacità valutata tramite la relazione (3.121) è inferiore a quella effettiva. L'approssimazione, come già indicato, è tanto migliore quanto più è piccolo il rapporto tra la distanza d e le dimensioni lineari dei piatti.

b) Condensatore sferico

I due conduttori costituenti il condensatore siano ora due superficie conduttrici sferiche concentriche di raggi R_1 e R_2 con $R_1 < R_2$, tenute ai potenziali φ_1 e φ_2 con $\varphi_1 > \varphi_2$. Sia q la carica del condensatore. Dalla prima delle soluzioni (3.87) ricaviamo che la quantità di carica sulla sfera di raggio R_1 può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} q &= 4\pi R_1^2 \sigma_1 = 4\pi R_1^2 \epsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{R_2}{R_1 (R_2 - R_1)} = \\ &= 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Il valore della capacità del condensatore sferico sarà pertanto:

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{(R_1 - R_2)}. \quad (3.123)$$

c) *Condensatore cilindrico*

Come ultimo esempio di condensatore con geometria semplice consideriamo quello formato da due superficie conduttrici cilindriche coassiali di raggio R_1 e R_2 con $R_1 < R_2$ e di altezza h , tenute ai potenziali φ_1 e φ_2 con $\varphi_1 > \varphi_2$. Sia q la carica del condensatore. Se la differenza $(R_2 - R_1)$ tra i due raggi è piccola rispetto alla altezza h possiamo considerare le superficie cilindriche come infinite e utilizzare, per determinare la relazione tra carica del condensatore e differenza di potenziale tra le armature, la prima delle relazioni (3.106). Si ha allora:

$$q = 2\pi R_1 h \sigma_1 = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\log R_2/R_1} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.124)$$

capacità

del condensatore risulta essere:

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\log R_2/R_1}. \quad (3.125)$$

3.12 Condensatori in serie e in parallelo

Un condensatore di geometria qualsiasi facente parte di un circuito elettrico viene rappresentato mediante il simbolo $--||--$. Quando n condensatori di capacità C_1, C_2, \dots, C_n sono disposti come è mostrato in Fig. 3.8 si dicono *collegati in serie*.

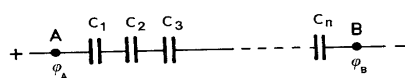


FIG. 3.8 - Collegamento in serie di n condensatori.

Supponiamo che inizialmente i condensatori siano tutti scarichi; poniamo una carica positiva $+q$ nel punto A ed una carica negativa $-q$ nel punto B del collegamento. La seconda armatura del primo condensatore acquisterà per induzione una carica $-q$ e di conseguenza, poiché la somma delle cariche indotte deve essere nulla, sulla prima armatura del secondo conduttore dovrà esistere una carica $+q$. Estendendo questo ragionamento a tutti i successivi condensatori si ricava che ogni condensatore è carico con carica q e che la carica totale del sistema è nulla. Tra le armature dell' i -esimo condensatore della sene esisterà una differenza di potenziale $\Delta\varphi_i = q/C_i$ e la differenza di potenziale

$\varphi_A - \varphi_B$, misurata alle estremità della serie, è quindi la somma delle differenze di potenziale esistenti ai capi di ciascun condensatore. Così:

$$\begin{aligned} \varphi_A - \varphi_B &= \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_n = \\ &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Se poniamo:

$$\frac{1}{C} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \quad (3.127)$$

potremmo scrivere la (3.126) nella forma:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C}. \quad (3.128)$$

La quantità C , definita dalla (3.127), rappresenta quindi la capacità equivalente della combinazione in serie di n condensatori.

Quando n condensatori di capacità C_1, C_2, \dots, C_n sono disposti come mostrato in Fig. 3.9, in modo tale

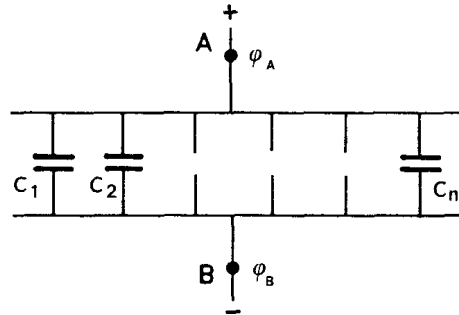


FIG. 3.9 - Collegamento in parallelo di n condensatori.

cioè che tra le armature di ognuno di essi esista la stessa differenza di potenziale, si dice che sono *collegati in parallelo*. La quantità di carica dello i -esimo condensatore è $q_i = C_i (\varphi_A - \varphi_B)$ e la quantità di carica totale del sistema è pertanto:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) (\varphi_A - \varphi_B). \quad (3.129)$$

Se poniamo:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (3.130)$$

la (3.129) assume la forma:

$$q = C (\varphi_A - \varphi_B). \quad (3.131)$$

Da questa relazione appare evidente che la quantità C , definita dalla (3.130), rappresenta la capacità equivalente degli n condensatori collegati in parallelo.

3.13 Energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore

Nel paragrafo 2.6 abbiamo calcolato l'energia potenziale di un sistema di N cariche, cioè il lavoro necessario per portare le N cariche dall'infinito alle loro posizioni. Il risultato di tale calcolo ha fornito per il lavoro totale una espressione del tipo:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (3.132)$$

dove con φ_i si è indicato il potenziale esistente nel punto ove è posta la i -esima carica generato da tutte le altre cariche. Se si è invece in presenza di distribuzioni continue di carica, con densità volumetrica ρ in un certo volume V e densità superficiale σ distribuita su una superficie S , avremo che l'energia potenziale del sistema, per analogia con la (3.132), è data da:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi(x, y, z) \rho(x, y, z) dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi(x, y, z) \sigma(x, y, z) da \quad (3.133)$$

dove $\varphi(x, y, z)$ rappresenta il potenziale generato nel punto x, y, z dalle distribuzioni volumetriche e superficiali di cariche.

Nel caso in cui il sistema sia formato solo da N conduttori, indicando con S_i la i -esima superficie, con φ_{S_i} il potenziale del conduttore e con σ_i , la densità superficiale di carica corrispondente, l'energia elettrostatica è:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \varphi_{S_i} \sigma_i da_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_{S_i} \int_{S_i} \sigma_i da_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_{S_i} q_i \quad (3.134)$$

dove con q_i abbiamo indicato la carica totale posseduta dall' i -esimo conduttore. Applichiamo ora il risultato ottenuto al caso di un condensatore.

Operiamo in modo da generare su una armatura di un condensatore di capacità C una carica $+q$ e sull'altra armatura una carica $-q$; siano φ_1 e φ_2 i rispettivi potenziali finali dei due conduttori. Utilizzando l'espressione (3.134) si ricava che per caricare il condensatore è necessario un lavoro:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 q - \varphi_2 q) = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.135)$$

Per la definizione di capacità $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ questa relazione può essere scritta anche nelle seguenti forme equivalenti:

$$W = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (3.136)$$

La (3.136) rappresenta l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

4

I dielettrici

Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo esposto la teoria del campo elettrostatico nel vuoto ed in presenza di corpi conduttori. Vogliamo ora esaminare il comportamento dei materiali isolanti, o dielettrici, quando sono sottoposti all'azione di un campo elettrostatico. A differenza dei conduttori, all'interno dei quali esistono cariche libere di muoversi sotto l'azione di un campo elettrico, i dielettrici sono caratterizzati dal fatto di non possedere cariche libere. In particolare gli elettroni dei loro atomi occupano, sotto l'azione elettrostatica dei nuclei, posizioni di equilibrio (corrispondenti cioè a minimi relativi del potenziale) molto stabili e non sono in grado di compiere, anche sotto l'azione di un campo elettrico esterno, spostamenti sensibili rispetto alla loro posizione di equilibrio. È d'altra parte evidente che, essendo i dielettrici (come tutta la materia) composti di cariche positive e negative, debbano risentire anche essi della presenza di un campo elettrostatico esterno e che a loro volta debbano influenzarlo.

In effetti il campo elettrico esterno agisce sulle molecole del dielettrico provocando delle modificazioni nella loro struttura. Questo fenomeno prende il nome di *polarizzazione* e un dielettrico che ha subito tale modifica si dice *polarizzato*. Si nota sperimentalmente che un dielettrico polarizzato genera a sua volta un campo elettrico sia all'esterno sia all'interno del volume da esso occupato. Tale campo esercita un'influenza sulla distribuzione di cariche responsabile del campo elettrico iniziale e nei punti interni del dielettrico si somma al campo esterno contribuendo in tal modo al fenomeno di polarizzazione. Il fatto che la polarizzazione dipende dal campo elettrico totale costituirà,

come vedremo, uno dei punti critici nello sviluppo della teoria dell'elettrostatica dei dielettrici. Per poter trattare questi effetti in maniera quantitativa è necessario introdurre nella teoria del campo elettrostatico delle grandezze fisiche appropriate per descrivere il comportamento del dielettrico. Procedendo da un punto di vista fenomenologico, trascurando cioè di dare una giustificazione dei fenomeni a livello atomico, possiamo cercare di formulare delle leggi sperimentali in cui si tenga conto della presenza di un dielettrico mediante l'introduzione di un parametro costante, caratteristico ovviamente del mezzo. La determinazione di tale parametro può essere fatta, per esempio, misurando sperimentalmente la capacità di un condensatore piano nei due casi in cui tra le armature vi sia il vuoto o un dielettrico. Indicando con C_0 la misura della capacità del condensatore nel vuoto, si trova che la capacità del condensatore contenente il dielettrico è maggiore ed è uguale ad $\epsilon_r C_0$: la costante ϵ_r risulta come era logico attendersi caratteristica del dielettrico utilizzato. Supponendo poi che l'esperienza nei due casi, vuoto e dielettrico, sia stata eseguita mantenendo invariata la quantità di carica delle armature, poiché per definizione è $C = Q/\Delta\phi$, avremo che nel caso con dielettrico per il quale la capacità risulta maggiore di un fattore ϵ_r , la differenza di potenziale, rispetto a quella che si aveva tra le armature nel vuoto, deve essere minore dello stesso fattore. Tenendo conto della relazione tra campo elettrico e potenziale $E = -\text{grad } \phi$, si deduce che anche il campo elettrico tra le armature del condensatore con dielettrico è ϵ_r volte più piccolo. Poiché per un condensatore piano, nel limite in cui si considerano le armature infinite, si ha nel vuoto che $E = \sigma/\epsilon_0$, per il condensatore con dielettrico si avrà, per quanto detto, $E = \sigma/\epsilon_0\epsilon_r$. La relazione fra E e σ è stata a suo tempo introdotta nello studio dell'elettrostatica nel vuoto facendo uso del teorema di Gauss. Nel caso di presenza di un dielettrico i risultati ora descritti portano a ritenere che tale teorema in un dielettrico si debba scrivere in forma differenziale $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0\epsilon_r$. Una volta noto il teorema di Gauss in forma differenziale e ricordando l'altra proprietà fondamentale del campo elettrostatico e cioè che esso ammette un potenziale, per cui $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, siamo in grado di risolvere qualunque problema di elettrostatica in presenza di dielettrici. Eseguendo per esempio l'integrale di volume della relazione $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0\epsilon_r$ su una sfera di raggio r immersa in un dielettrico omogeneo e contenente nel centro una carica puntiforme q troviamo, con un

calcolo assai semplice, che $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2}$: è questa l'espressione del campo

elettrico generato da una carica puntiforme nel dielettrico.

Tuttavia, allo scopo di meglio comprendere gli effetti legati alla polarizzazione di un dielettrico, non utilizzeremo nel corso di questo capitolo una trattazione fenomenologica, come quella su cui si basano le considerazioni precedenti, ma procederemo seguendo un punto di vista microscopico, considerando cioè l'azione che il campo elettrico esterno produce su una singola molecola del dielettrico. Una volta noto il comportamento di una molecola, e quindi la distribuzione delle cariche in seno ad essa, lo studio del dielettrico si trasformerà nello studio di un insieme di cariche poste nel vuoto interagenti tra loro e col campo elettrico esterno.

Evidentemente un simile procedimento porterebbe a dover risolvere un insieme

di equazioni uguale al numero di molecole contenute nel dielettrico, il che è completamente al di fuori di ogni possibilità pratica. Converrà pertanto introdurre qualche grandezza macroscopica capace di rappresentare il comportamento delle molecole opportunamente mediato. I risultati a cui arriveremo sviluppando l'ultimo procedimento esposto coincideranno, come è da attendersi, con quelli che si sarebbero ottenuti seguendo la trattazione fenomenologica, come impostata all'inizio di questo paragrafo.

Vogliamo fin d'ora sottolineare, anticipando quanto dimostreremo nei prossimi paragrafi, un risultato notevole a cui perverremo e che cioè anche nel caso dei dielettrici, seppure con maggiori difficoltà rispetto a quello dei conduttori, i fenomeni elettrostatici potranno essere trattati come se fossero dovuti ad opportune distribuzioni di cariche poste nel vuoto.

Poiché come abbiamo detto il primo problema che dovremo affrontare è quello di esaminare il comportamento di una singola molecola sotto l'azione di un campo elettrico esterno, dedicheremo i due paragrafi successivi ad introdurre alcuni concetti legati alla descrizione del campo elettrico generato da particolari distribuzioni di cariche nel vuoto.

4.1 Il dipolo elettrico

Siano date due cariche puntiformi $+q$ e $-q$ poste ad una distanza δ . Associamo a questo sistema di cariche la quantità vettoriale:

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{\delta} \quad (4.1)$$

dove con $\boldsymbol{\delta}$ indichiamo il vettore avente per modulo δ e per direzione quella che va dalla carica negativa a quella positiva. Facendo tendere $\boldsymbol{\delta}$ a zero e contemporaneamente q all'infinito in maniera tale che \mathbf{p} rimanga una quantità finita, il sistema risultante prende il nome di *dipolo elettrico* e il vettore \mathbf{p} viene chiamato *momento del dipolo*. È chiaro che un tale sistema risulta essere una pura astrazione matematica. In pratica il concetto di dipolo assume grande interesse quando la distanza δ tra le cariche può essere considerata piccola rispetto alle distanze caratteristiche del problema che si sta considerando ed è proprio secondo questo punto di vista che noi utilizzeremo, nella nostra trattazione dei dielettrici, l'espressione dipolo e momento di dipolo.

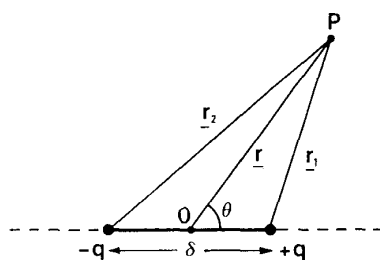


FIG. 4.1 - Dipolo elettrico formato da due cariche $+q$ e $-q$ poste a distanza δ .

Il potenziale generato da un tale sistema di cariche in un punto P distante \mathbf{r}_1 da $+q$ ed \mathbf{r}_2 da $-q$ dato da :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(r^2 + \frac{\delta^2}{4} - 2 \frac{\delta}{2} r \cos \vartheta \right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(r^2 + \frac{\delta^2}{4} + 2 \frac{\delta}{2} r \cos \vartheta \right)^{1/2}} \right].\end{aligned}\quad (4.2)$$

Come è mostrato in Fig. 4.1 con \mathbf{r} abbiamo indicato la distanza tra il punto mediano O del segmento che unisce le cariche ed il punto P e con ϑ l'angolo formato da \mathbf{r} con la retta passante per le due cariche.

La relazione (4.2) può essere scritta:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{r^2} - \frac{\delta}{r} \cos \vartheta \right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{r^2} + \frac{\delta}{r} \cos \vartheta \right)^{1/2}} \right] \quad (4.3)$$

Se assumiamo che sia $\delta \ll r$ potremo trascurare i termini contenenti la quantità δ^2/r^2 rispetto a quelli contenenti δ/r ottenendo:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta}{r} \cos \vartheta \right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{r} \cos \vartheta \right)^{1/2}} \right]. \quad (4.4)$$

Ponendo $s = \frac{\delta}{r} \cos \vartheta$ e sviluppando in serie binomiale la quantità $(1 \pm s)^{-1/2}$ che compare nella (4.4) si ottiene l'espressione:

$$(1 \pm s)^{-1/2} = 1 \mp \frac{s}{2} + \frac{3}{8} s^2 + \dots \quad (4.5)$$

Arrestando lo sviluppo al secondo termine e sostituendo la (4.5) nella (4.4) otteniamo ¹⁾:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\delta \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

(4.6)

¹⁾ L'espressione (4.6) che fornisce un valore approssimato per il potenziale generato da un sistema di due cariche rappresenta invece il valore esatto del potenziale generato da un «vero» dipolo, definito come il sistema di due cariche $+q$ e $-q$ poste a una distanza δ e per le quali $q\delta = p$, quando si operi il passaggio al limite $\delta \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$. Per evitare possibili malintesi, adopereremo, quando è opportuno specificarlo, la dizione «dipolo finito» per indicare il sistema di due cariche finite $+q$ e $-q$ poste a una distanza finita δ .

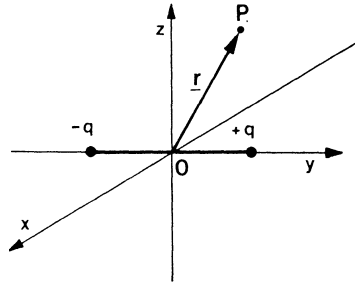


FIG. 4.2. - Dipolo elettrico posto parallelamente all'asse y.

dove nello scrivere l'ultima espressione abbiamo fatto uso della definizione di momento di dipolo data dalla (4.1).

Prendiamo ora un sistema di coordinate cartesiane con origine nel punto O e supponiamo che il dipolo sia disposto parallelamente all'asse y come mostrato in Fig. 4.2.

Ponendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ l'espressione (4.6) diviene:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{py}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Dato che $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, ricaviamo per le componenti del campo elettrico generato dal dipolo:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} x \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} y \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Queste relazioni possono essere scritte sinteticamente in forma vettoriale secondo la:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (4.8)$$

È possibile dimostrare che la componente del campo elettrico perpendicolare al piano comprendente il dipolo ed il punto P è nulla. Infatti, prendendo per comodità il punto P nel piano $x = 0$, è facile per esempio verificare dalla prima delle (4.7) che la componente E_x è nulla.

I risultati ottenuti mostrano che il potenziale di un dipolo varia come $1/r^2$ e che il campo elettrico varia come $1/r^3$ a differenza di quanto accade per una

singola carica puntiforme per la quale il potenziale varia come $1/r$ ed il campo elettrico come $1/r^2$. Questo comportamento è dovuto al fatto che a grandi distanze gli effetti delle due cariche di segno opposto che costituiscono il dipolo tendono in prima approssimazione ad annullarsi (ad esempio nell'espressione del campo elettrico si annullano i termini che vanno come $1/r^2$) mentre i termini di ordine superiore (per il campo elettrico termini che vanno come $1/r^3$) restano diversi da zero. Questa affermazione risulterà più comprensibile da un punto di vista fisico alla luce degli argomenti che svilupperemo nel paragrafo seguente. È importante tuttavia notare che il potenziale ed il campo elettrico del dipolo forniti dalle espressioni (4.6) e (4.8) perdono di validità in punti prossimi alle cariche del dipolo. In effetti l'espressione (4.8) per come è stata ricavata non può rappresentare l'andamento del campo elettrico, come è mostrato per esempio in Fig. 2.1 (a), nella regione dello spazio immediatamente vicino alle due cariche.

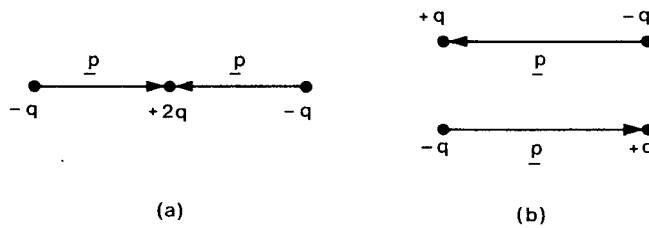


FIG. 4.3 a) e b) - Quadrupoli.

Nella Fig. 4.3 sono riportati due particolari sistemi di cariche che vengono indicati con il termine di *quadrupoli elettrici*. Tali sistemi di cariche, secondo quanto è possibile verificare dall'esame della figura stessa, presentano un momento di dipolo totale nullo ed a grandi distanze producono un potenziale che varia come $1/r^3$ ed un campo elettrico che varia come $1/r^4$. Anche in questo caso vale un discorso del tipo di quello appena condotto nel compiere il confronto riguardante la dipendenza da r del potenziale e del campo elettrico tra dipolo e carica puntiforme.

4.2 Sviluppo in multipoli del potenziale di una distribuzione di cariche

Consideriamo una distribuzione arbitraria di carica $\rho(x, y, z)$ che possa assumere valori positivi e negativi, contenuta in un volume V . Ci proponiamo di calcolare il potenziale generato da questa distribuzione in punti ad essa esterni posti ad una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari del volume contenente la carica. Per semplicità prendiamo l'origine O del sistema di coordinate interna al volume V . Sappiamo che il valore del potenziale generato da un tale sistema di cariche è dato da:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (4.9)$$

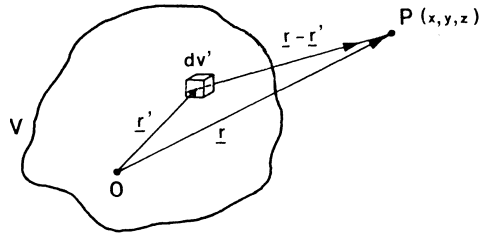


FIG. 4.4. - Ogni elemento di volume dv' della distribuzione di carica contribuisce al potenziale nel punto P .

dove dv' rappresenta un elemento di volume all'interno della distribuzione ed \mathbf{r}' la relativa distanza dall'origine, come può essere visto in Fig. 4.4.

La quantità $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ che compare nella (4.9) può essere espressa anche nella seguente maniera

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (4.10)$$

Poiché siamo interessati a calcolare il potenziale in punti per i quali, secondo le ipotesi fatte, vale la disuguaglianza $r \gg r'$ possiamo sviluppare la (4.10)

in serie di potenze utilizzando lo sviluppo $(1 - s)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}s + \frac{3}{8}s^2 + \dots$,

tenendo conto che nel caso in questione $s = \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2}$. Eseguendo lo sviluppo otteniamo:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{8} \left[\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right]^2 \right\} + \dots \quad (4.11)$$

tr

ascurando i termini proporzionali ad

$$\frac{r'^3}{r^3} :$$

(4.12)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} \right].$$

Introducendo la (4.12) nella (4.9) possiamo così esprimere il potenziale generato dalla distribuzione di carica come somma di una serie di termini:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv' + \right. \\ & \left. + \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{2} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] dv' + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Una osservazione importante che scaturisce da questo risultato è che il potenziale in punti molto distanti dalla distribuzione di carica è determinato essenzialmente dal primo termine non nullo della serie (4.13) e che i termini successivi rappresentano correzioni di ordine superiore tanto meno importanti quanto più si è lontani dalle sorgenti.

Cerchiamo ora di chiarire qual'è il significato di ciascuno dei termini della serie (4.13). Per quanto riguarda il primo termine, l'integrale di volume che vi compare è uguale alla carica totale della distribuzione, ed è quindi evidente che esso rappresenta il potenziale che sarebbe generato in \mathbf{r} se tutta la carica contenuta in V fosse posta nell'origine delle coordinate. Nel caso in cui la quantità di carica netta della distribuzione fosse nulla questo termine risulterebbe essere uguale a zero.

Passando ad analizzare il secondo termine della serie è importante notare

innanzitutto, per chiarirne il significato fisico, che la quantità $\mathbf{r} \cdot \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$

fornisce una indicazione sulla separazione relativa tra cariche positive e negative della distribuzione nella direzione individuata da \mathbf{r} . Inoltre si può notare che sotto il segno di integrale appare una espressione molto simile a quella del momento di dipolo definito nel precedente paragrafo mediante la relazione (4.1). In effetti se come distribuzione di carica assumessimo quella di Fig. 4.1, formata da due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ ed eseguiamo in maniera opportuna

l'integrale in questione $\int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$ ritroveremmo proprio il valore del momento di dipolo dato dalla (4.1). La quantità:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \quad (4.14)$$

prende il nome di *momento di dipolo* della distribuzione di carica. Il secondo termine della serie (4.13) rappresenta così il potenziale che sarebbe generato in \mathbf{r} se nell'origine delle coordinate fosse posto un dipolo di momento \mathbf{p} dato dalla (4.14). Si osservi che per una distribuzione con carica totale nulla avente un centro di simmetria, quando cioè i baricentri delle cariche positive e di quelle negative coincidono, il momento di dipolo è nullo.

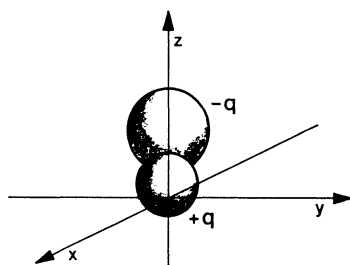


FIG. 4.5 - Distribuzione di carica avente momento di monopolo nullo e momento di dipolo diverso da zero.

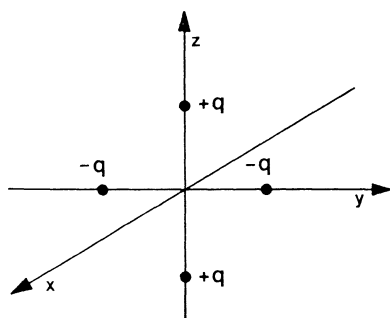


FIG. 4.6 - Distribuzione di carica con momenti di monopolio e di dipolo nulli.

Il terzo termine, che si presenta con una forma più complessa, rappresenta il potenziale generato da un momento di quadrupolo posto nell'origine, il quarto termine il potenziale generato da un momento di ottupolo e così via. I termini della serie vengono indicati a partire dal primo con i nomi di *termine di monopolio*, *di dipolo*, *di quadrupolo* ecc.

È interessante osservare che se la carica totale della distribuzione è nulla il valore del momento di dipolo (4.14) non dipende dalla particolare scelta dell'origine delle coordinate. Se spostiamo infatti l'origine in modo da sostituire al vettore \mathbf{r}' il vettore $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0''$, dove \mathbf{r}_0'' rappresenta la posizione della vecchia origine rispetto a quella nuova, avremo che il momento di dipolo potrà essere scritto nella forma:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r}'' dv' = \int_V \rho (\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0'') dv' = \int_V \rho \mathbf{r}' dv' + \mathbf{r}_0'' \int_V \rho dv'. \quad (4.15)$$

Poiché per l'ipotesi fatta l'ultimo integrale della (4.15) è nullo si ricava, come volevamo dimostrare, che il valore di \mathbf{p} non dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate e che quindi in questo caso si può considerare il momento di dipolo di una distribuzione come una caratteristica intrinseca della distribuzione, a prescindere dal particolare sistema di riferimento scelto. In Fig. 4.5 è riportato un esempio di distribuzione di carica con carica totale nulla ma con momento di dipolo diverso da zero. In Fig. 4.6 è invece mostrata una particolare distribuzione di carica con carica totale e momento di dipolo nulli ma con momento di quadrupolo diverso da zero.

4.3 Energia potenziale di un dipolo. Forze agenti su un dipolo

Poniamo un dipolo ¹⁾ formato da due cariche $+q$ e $-q$, separate da una distanza δ , in una regione dello spazio nella quale sia presente un campo elettrico

¹⁾ In questo paragrafo eseguiremo i calcoli per un dipolo «finito» osservando però che, come è facile rendersi conto, i risultati rimangono validi anche per un dipolo «vero» puntiforme.

$E(x, y, z)$. Ammettiamo inoltre di poter considerare il dipolo come un sistema rigido assumendo che la distanza δ tra le cariche rimanga costante. Chiamando con φ_A il potenziale nel punto A, dove è posta la carica $-q$, e con φ_B il potenziale nel punto B, dove è posta la carica $+q$, abbiamo che l'energia potenziale del sistema delle due cariche costituenti il dipolo è:

$$W = q(\varphi_B - \varphi_A).$$

(4.16)

Se esprimiamo il potenziale φ_B nella forma:

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{\partial \varphi_A}{\partial \delta} \delta \quad (4.17)$$

indicando con $\frac{\partial \varphi_A}{\partial \delta}$ la derivata del potenziale nella direzione individuata dall'asse del dipolo, cioè la direzione del momento del dipolo, la (4.16) diviene:

$$W = q \left(\varphi_A + \frac{\partial \varphi_A}{\partial \delta} \delta - \varphi_A \right) = q \delta \frac{\partial \varphi_A}{\partial \delta}. \quad (4.18)$$

Dalla relazione (1.26) si ricava che la derivata direzionale di una funzione è uguale alla componente del gradiente della funzione nella direzione lungo la quale si esegue la derivata. Il risultato (4.18) può pertanto essere scritto, tenendo conto che $\text{grad } \varphi = -\mathbf{E}$ e indicando, come è mostrato in Fig. 4.7, con ϑ l'angolo tra la direzione del momento del dipolo e il campo E , nella seguente maniera :

$$W = q \delta \cdot \text{grad } \varphi = -q \delta E \cos \vartheta. \quad (4.19)$$

Ricordando poi la definizione di momento di dipolo possiamo porre questa relazione, che fornisce l'energia potenziale del dipolo, nella forma vettoriale:

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (4.20)$$

Per quanto diremo nel seguito di questo capitolo assume particolare importanza la conoscenza delle forze con le quali un campo elettrico esterno agisce su un dipolo. Sappiamo da un teorema di meccanica che l'effetto di un insieme

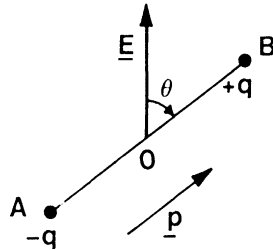


FIG. 4.7 - Dipolo con momento elettrico p formante un angolo ϑ con un campo elettrico applicato.

di forze agenti su un sistema rigido può essere sempre rappresentato in maniera equivalente mediante una forza applicata al baricentro del sistema ed una coppia di forze.

Ricordando che l'energia potenziale di un sistema di cariche rappresenta il lavoro compiuto contro la forza del campo elettrico per portare le cariche dall'infinito a certe determinate posizioni, possiamo ricavare le componenti lungo i tre assi cartesiani della forza applicata al baricentro del dipolo eseguendo le derivate cambiate di segno rispetto alle variabili x, y, z , dell'energia potenziale data dalla (4.20). Avremo così:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial W}{\partial x} = \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ F_y &= -\frac{\partial W}{\partial y} = \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ F_z &= -\frac{\partial W}{\partial z} = \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Valendo poi la relazione

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

e quelle analoghe per le altre componenti del campo elettrico, le (4.21) divengono :

$$\begin{aligned} F_x &= \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ F_y &= \left(p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ F_z &= \left(p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

In forma vettoriale abbiamo quindi che:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (4.23)$$

Facciamo notare che la quantità in parentesi va considerata come l'operatore differenziale applicato al vettore campo elettrico \mathbf{E} .

$$p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Per determinare il momento meccanico \mathcal{M} della coppia di forze agente sul dipolo calcoliamo il lavoro che il momento \mathcal{M} compie per far ruotare il sistema di un angolo $d\theta$. Il lavoro è dato da:

$$d\mathcal{L} = -\mathcal{M} d\theta \quad (4.24)$$

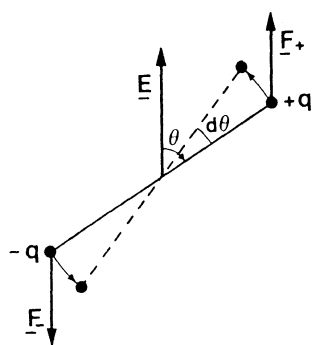


FIG. 4.8. - L'azione della coppia di forze generate dal campo elettrico applicato tende ad orientare il momento elettrico del dipolo parallelamente al campo.

La presenza del segno meno è dovuta al fatto che il momento meccanico \mathcal{M} , come è riportato in Fig. 4.8, tende a far ruotare l'asse del dipolo nel senso dell'angolo ϑ decrescente e che quindi l'incremento di questo $d\vartheta$ va considerato come negativo. Per la conservazione dell'energia in un sistema isolato, come è quello in esame, il lavoro viene compiuto a spese dell'energia potenziale del dipolo; dovrà cioè essere soddisfatta la relazione:

$$d\mathcal{L} + dW = 0. \quad (4.25)$$

Avremo così che:

$$dW = -\mathcal{M} d\vartheta$$

(4.26)

e quindi che:

$$\mathcal{M} = \frac{dW}{d\vartheta}. \quad (4.27)$$

Per quanto riguarda la (4.27) va osservato che normalmente il momento \mathcal{M} viene definito come la derivata dell'energia potenziale cambiata di segno. Nel nostro caso il segno meno non compare perché, come abbiamo già detto, $d\vartheta$ è un incremento negativo.

Introducendo la (4.19) nella (4.27) si ricava che:

$$\mathcal{M} = pE \sin \vartheta \quad (4.28)$$

e in forma vettoriale che:

$$\mathcal{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (4.29)$$

essendo il momento meccanico calcolato rispetto al punto mediano O della distanza tra le due cariche del dipolo. Se il campo elettrico esterno è uniforme la forza (4.28) è nulla e sul dipolo agisce solo la coppia di momento \mathcal{M} che tenderà

ad orientare l'asse del dipolo parallelamente alla direzione del campo elettrico. Questa posizione rappresenta una situazione di equilibrio stabile poiché ad essa compete il valore minimo dell'energia potenziale del sistema.

4.4 Il vettore polarizzazione elettrica

Il materiale dielettrico ideale, come abbiamo già detto, non contiene cariche libere di muoversi sotto l'azione di un campo elettrico esterno; essendo tuttavia composto, come tutti i mezzi materiali di atomi e molecole, cioè di insiemi di cariche, deve evidentemente risentire della presenza di un campo elettrico. Ai fini della discussione del comportamento dei dielettrici è utile allora una analisi preliminare delle caratteristiche elettrostatiche di un singolo atomo o di una singola molecola. Per fissare le idee consideriamo dapprima il sistema più semplice, e cioè l'atomo di idrogeno.

È noto, e abbiamo già avuto occasione di ricordarlo, che l'atomo di idrogeno può essere schematizzato, in maniera intuitiva, con un modello consistente in un nucleo centrale carico positivamente e in un elettrone che ruota attorno al nucleo stesso. In una siffatta schematizzazione il sistema delle due cariche $+e$ e $-e$ che costituisce l'atomo risulta dotato di un momento di dipolo di modulo uguale al prodotto della carica e per la distanza nucleo-elettrone e diretto dall'elettrone verso il nucleo. Dato che l'elettrone ruota attorno al nucleo, la direzione del momento di dipolo varia continuamente da istante a istante: il suo valor medio, calcolato su un periodo T di rotazione, risulta esattamente nullo e tale sarà in pratica per qualsiasi tempo $t > T$. Osserviamo inoltre che, come verrà accennato a suo tempo, la moderna meccanica quantistica dà dell'atomo una descrizione diversa; volendo schematizzare tale descrizione in un modello intuitivo, si vede che esso è più simile a un sistema costituito da un nucleo centrale circondato da una distribuzione di carica negativa stazionaria (nuvola elettronica), contenuta in una sferula avente un raggio uguale al raggio atomico e centrata sul nucleo stesso (vedi Fig. 4.9). Un siffatto sistema di cariche, alla luce di quanto esposto al paragrafo 4.2, presenta un momento di monopolo e un momento di dipolo nulli.

Queste considerazioni fatte per l'atomo di idrogeno sono valide per qualsiasi tipo di atomo poiché la carica totale di un atomo è nulla e la distribuzione della carica degli elettroni, qualunque sia il loro numero, è simmetrica intorno al

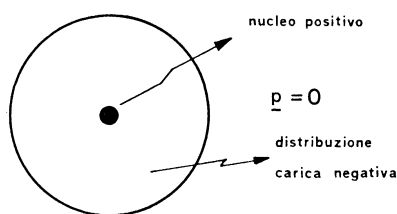


FIG. 4.9 - L'atomo può essere descritto in prima approssimazione come un nucleo positivo circondato da una distribuzione sferica di carica negativa.

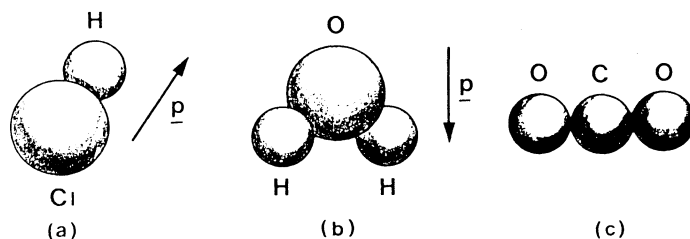


FIG. 4.10a) e b) - Esempi di molecole polari; il momento di dipolo proprio è diverso da zero.

c) Esempio di molecola non polare; il momento di dipolo proprio è uguale a zero.

nucleo. Possiamo così concludere che gli atomi non presentano un momento di dipolo. Questo non è però vero per le molecole, le quali possono essere divise a questo riguardo in due categorie : *molecole non polari* che non posseggono un momento di dipolo e *molecole polari* che posseggono un momento di dipolo proprio. Naturalmente sia le molecole non polari sia le molecole polari, essendo sistemi globalmente neutri, non posseggono momento di monopolo.

Le molecole che hanno una distribuzione simmetrica delle cariche, come quelle di tipo diatomico H_2 , N_2 e O_2 , sono non polari e non posseggono quindi momento di dipolo, mentre quelle molecole che hanno una distribuzione asimmetrica delle cariche, come HCl , H_2O , N_2O e CO , sono polari e posseggono un momento di dipolo, proprio.

Per chiarire questi concetti discutiamo particolareggiatamente la struttura di alcune molecole. Quando per esempio un atomo di idrogeno ed uno di cloro, che presentano una distribuzione simmetrica delle cariche, si uniscono per formare una molecola di HCl , come mostrato in Fig. 4.10 (a), un elettrone si trasferisce dall'atomo di idrogeno all'atomo di cloro. Come risultato dello spostamento dell'elettrone si ha che la molecola di HCl risulta composta di due *elementi*, di cui uno presenta una carica negativa in eccesso e l'altro una carica positiva in eccesso. La molecola possiede pertanto una distribuzione asimmetrica delle cariche ed è quindi una molecola polare. Possiamo allora calcolare il valore del momento di dipolo \mathbf{p} della molecola eseguendo il prodotto tra il modulo della carica dell'elettrone e la distanza internucleare, che in questo caso è di circa $1,27 \cdot 10^{-8}$ cm. Otteniamo un momento di dipolo dell'ordine di $20 \cdot 10^{-30}$ coulomb-metro mentre il valore misurato sperimentalmente è di $3,4 \cdot 10^{-30}$ coulomb-metro. Si può concludere tuttavia che, anche se il valore calcolato è maggiore di quello misurato, il modello grossolano da noi utilizzato è in grado di fornire almeno l'ordine di grandezza del momento di dipolo della molecola. Prendiamo in esame ora le due molecole triatomiche H_2O e CO_2 . L'esperienza ci dice che mentre la prima è una molecola polare, con un forte valore per il momento di dipolo elettrico, la seconda è una molecola non polare cioè con momento di dipolo nullo. Questi comportamenti possono essere giustificati considerando le strutture delle due molecole mostrate schematicamente in Fig. 4.10 b) e c). In effetti si può vedere che mentre la molecola H_2O ha una forma

asimmetrica triangolare con l'atomo di ossigeno posto nel vertice e i due atomi di idrogeno posti sulla base di un triangolo, la molecola di CO_2 ha una forma simmetrica. Da questo si può dedurre che la presenza e il valore del momento di dipolo elettrico forniscono informazioni utili sulla struttura della molecola.

Una domanda che sorge spontanea a questo punto è la seguente: perché una sostanza formata da molecole polari, dotate quindi di momento di dipolo proprio, in condizioni normali non produce globalmente all'esterno alcun effetto elettrostatico? La risposta è facilmente trovata pensando che in effetti non esiste alcun motivo per il quale i momenti di dipolo delle singole molecole che compongono un campione di una determinata sostanza debbano essere orientati in una direzione privilegiata. Quello che si verifica in realtà è che l'orientamento dei momenti di dipolo è completamente casuale per cui il campo elettrostatico risultante dei dipoli delle numerose molecole che costituiscono il campione è nullo.

Cerchiamo ora di capire cosa accade quando poniamo un atomo od una molecola in un campo elettrostatico esterno. Occupiamoci dapprima del comportamento degli atomi e delle molecole non polari che come abbiamo visto sono sistemi privi di momento di dipolo elettrico. Prendiamo di nuovo in considerazione come esempio un atomo di idrogeno posto questa volta in una regione dello spazio nella quale esiste un campo elettrico generato da opportune sorgenti esterne. Il nucleo positivo dell'atomo risentirà di una forza che lo sposterà in direzione parallela a quella del campo elettrico mentre la carica negativa, distribuita nella sfera che circonda il nucleo, risentirà di una forza con verso opposto al campo elettrico. Come risultato finale si otterrà una configurazione approssimativamente uguale a quella mostrata in Fig. 4.11. La distribuzione di carica negativa non presenterà più una forma sferica ma una forma ovoidale nella direzione del campo elettrico e i baricentri delle cariche negative e di quelle positive non saranno più coincidenti. L'atomo risulta pertanto *deformato* dalla presenza del campo elettrico e tale deformazione, che distrugge la simmetria iniziale della distribuzione di carica dell'atomo, è la causa dell'insorgere di un momento di dipolo, chiamato anche *momento di dipolo indotto*. Si dice che l'atomo, o la molecola, che hanno subito una tale modificazione sono *polarizzati per deformazione*.

Consideriamo infine il comportamento di una molecola polare posta in un campo elettrico esterno. Evidentemente la molecola subisce, come nel caso delle molecole non polari appena illustrato, il fenomeno della deformazione ma sovrapposto a questo esisterà un altro effetto ben più importante. Infatti come abbiamo visto nel paragrafo 4.3 il campo elettrico agendo sul momento di dipolo proprio della molecola con una coppia di forze tenderà ad orientare il momento stesso parallelamente al campo elettrico. Non dobbiamo però pensare che in un dielettrico formato da molecole polari tutti i momenti di dipolo siano orientati parallelamente al campo elettrico imposto, poiché bisogna tener conto del movimento delle molecole dovuto all'agitazione termica che tenderà ad opporsi all'effetto di allineamento. In realtà quello che si verifica è che ogni singolo dipolo in media nel tempo avrà una componente del momento non nulla nella direzione del campo elettrico. In questo caso si dice che la molecola, o il dielettrico formato

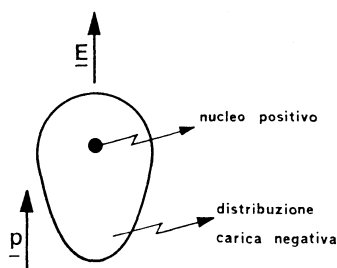


FIG. 4.1 1 - L'azione del campo elettrico sull'atomo separa i baricentri delle cariche di segno opposto, inizialmente coincidenti, e deforma la nuvola elettronica.

da quel particolare tipo di molecole, sono *polarizzati per orientamento*. Uno studio più particolareggiato di questo fenomeno sarà esposto nel capitolo successivo. Va infine ricordato che per le molecole polari l'effetto dovuto alla polarizzazione per deformazione è assai più piccolo di quello dovuto alla polarizzazione per orientamento.

A conclusione di queste considerazioni qualitative possiamo affermare che una sostanza dielettrica, sia essa costituita da molecole polari, sia da molecole non polari, in presenza di un campo elettrico esterno si polarizza. Essa subisce cioè un fenomeno di trasformazione a causa del quale possiamo pensare associato ad ogni molecola della sostanza un momento di dipolo elettrico, risultando così in grado di generare a sua volta in ogni punto dello spazio un campo elettrico. Il problema è ora quello di determinare il valore di questo campo tenendo conto del fatto che la polarizzazione di ogni singola molecola, e quindi della sostanza, è dovuta al campo elettrico totale, alla somma cioè del campo elettrico esterno più quello generato dalle stesse molecole polarizzate. Allo scopo di meglio individuare il contributo al campo elettrico dovuto solamente al dielettrico polarizzato ci limiteremo inizialmente a studiare il comportamento di un materiale polarizzato senza esaminare in dettaglio il tipo di molecole di cui esso è composto e il sistema utilizzato per polarizzarlo. Vedremo come sia possibile associare al fenomeno della polarizzazione una grandezza macroscopica che consente di descrivere gli effetti elettrostatici conseguenti alla polarizzazione stessa.

Consideriamo pertanto un blocco di dielettrico neutro e polarizzato. A causa della polarizzazione le cariche delle molecole del dielettrico subiscono di fatto una separazione, sia per un effetto di deformazione della molecola sia, nel caso che lo posseggano, per orientamento del dipolo proprio associato alla molecola. Possiamo allora affermare che ogni elemento del dielettrico è caratterizzato da un momento elettrico di dipolo dato, secondo la (4.14) da:

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \, dv = \int_{\Delta V} \mathbf{r} \, dq \quad (4.30)$$

e che il campo elettrico generato dalle cariche contenute in questo elemento di volume in un punto molto distante, nel senso introdotto nel paragrafo 4.2, è

essenzialmente quello prodotto da un momento di dipolo elettrico di valore Δp . Per ovviare all'inconveniente connesso con una simile definizione, che fa dipendere il valore di Δp dalle dimensioni dell'elemento di volume considerato, sarà bene introdurre un vettore \mathbf{P} che rappresenta il momento di dipolo per unità di volume, secondo la relazione:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad (4.31)$$

dove per ΔV si deve intendere un elemento di volume sufficientemente piccolo da un punto di vista macroscopico in modo che \mathbf{P} possa essere assunto uniforme all'interno di ΔV e allo stesso tempo di dimensioni tali da assicurare la regolarità della funzione \mathbf{P} . Operando in tal modo è possibile definire una funzione vettoriale del punto $\mathbf{P}(x, y, z)$ che rappresenta il momento elettrico di dipolo per unità di volume del dielettrico polarizzato. Il vettore \mathbf{P} viene chiamato *vettore polarizzazione elettrica* e nel sistema MKSQ è misurato in coulomb/m².

È possibile dare del vettore \mathbf{P} anche una diversa definizione, equivalente alla precedente. Consideriamo il momento di dipolo elettrico associato ad ogni singola molecola, indicato da \mathbf{p}_m , ed eseguiamo la sommatoria su tutte le molecole contenute all'interno di un elemento di volume ΔV . Si ottiene così:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (4.32)$$

Relativamente alle dimensioni dell'elemento di volume ΔV rimangono valide le considerazioni fatte nel caso della definizione (4.31); appare in questo modo evidente che l'orientamento del vettore $\mathbf{P}(x, y, z)$ è quello del risultante della sommatoria vettoriale contenuta nella (4.32). Mentre nel caso di polarizzazione per deformazione è ovvio che l'orientamento di \mathbf{P} coincide con quello dei singoli momenti \mathbf{p}_m di dipolo indotto delle molecole, nel caso di polarizzazione per orientamento, a causa della agitazione termica, diviene importante eseguire la somma vettoriale dei singoli momenti. Così per un dielettrico costituito da molecole polari non polarizzato, utilizzando la (4.32), troveremo un vettore \mathbf{P} nullo, come deve essere, a causa dell'orientamento casuale dei momenti di dipolo proprio.

4.5 Campo elettrico esterno generato da un dielettrico polarizzato

Siamo ora in grado di calcolare il campo elettrico generato in un punto esterno di un dielettrico polarizzato, di volume V , caratterizzato in ogni suo punto dal vettore $\mathbf{P}(x, y, z)$. Determineremo dapprima il potenziale prodotto dal dielettrico in un punto e poi ricaveremo il campo elettrico eseguendo il gradiente cambiato di segno del potenziale. Indicheremo con \mathbf{r} la posizione del punto in cui calcoliamo il potenziale rispetto all'origine O del sistema di riferimento e con \mathbf{r}' quella dei punti all'interno del volume V del dielettrico. Secondo quanto

detto nel paragrafo precedente ad ogni elemento di volume dv del dielettrico è associato un momento di dipolo elettrico dato da $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dv'$. E evidente che il potenziale generato da questo elemento di volume è essenzialmente il potenziale prodotto dal momento di dipolo $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dv'$ poiché all'interno di dv' non esistono momenti di monopolo e il potenziale dovuto a momenti di quadrupolo può essere considerato a grandi distanze trascurabile rispetto a quello prodotto dal momento di dipolo, decrescendo esso con una potenza superiore dall'inverso della distanza. Utilizzando allora opportunamente la relazione (4.6), sostituendo cioè a \mathbf{P} la quantità $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dv'$ ed a \mathbf{r} la distanza $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, possiamo scrivere che il potenziale in un punto \mathbf{r} dovuto all'elemento di volume è:

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' . \quad (4.33)$$

Il potenziale in \mathbf{r} generato da tutto il volume V del dielettrico è pertanto :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' . \quad (4.34)$$

Per pervenire ad una espressione più utile per il potenziale operiamo la seguente sostituzione nell'integrale che compare nella (4.34):

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.35)$$

intendendo con \mathbf{grad}' che le derivate dell'operatore gradiente vanno eseguite rispetto alle variabili dotate di indici x', y', z' . Per dimostrare l'eguaglianza

(4.35) scriviamo la quantità $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ nella seguente maniera:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} . \quad (4.36)$$

Le componenti del gradiente dell'espressione (4.36) rispetto ad x', y', z' sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Mettendo in forma vettoriale le espressioni precedenti abbiamo, come volevamo dimostrare, che:

$$\mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.38)$$

È immediato inoltre verificare che se il gradiente di $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ viene eseguito rispetto alla variabile \mathbf{r} si ottiene:

$$\mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.39)$$

Sostituendo la (4.38) nella (4.34) si ha così che:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (4.40)$$

Utilizziamo ora la seguente relazione vettoriale valida per la divergenza del prodotto tra una funzione scalare f e una funzione vettoriale \mathbf{F} :

$$\text{div} (f \mathbf{F}) = f \text{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{grad} f \quad (4.41)$$

Ponendo $\mathbf{F} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')$ e $f =$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{l'integrando della (4.40) diviene:}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \text{div}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.42)$$

Potremo allora riscrivere la (4.40) nella forma:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \text{div}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \int_V - \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right\}. \quad (4.43)$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale si trova che:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right\} \quad (4.44)$$

dove con \mathbf{n} indichiamo la normale alla superficie esterna e con S la superficie che delimita il volume V del dielettrico. Le quantità $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ e $-\text{div} \mathbf{P}$, che compaiono nei due integrali della relazione (4.44), hanno rispettivamente le dimensioni di una carica per unità di superficie, e di una carica per unità di volume.

Posto:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (4.45)$$

e

$$\rho_p = -\text{div} \mathbf{P} \quad (4.46)$$

chiameremo σ_p e ρ_p rispettivamente *densità superficiale* e *densità volumetrica delle cariche di polarizzazione o legate*.

Per comprendere il significato fisico dei risultati cui siamo pervenuti, osserviamo che in base ad essi il potenziale generato dal dielettrico polarizzato in un punto esterno può essere calcolato assumendo che sulla superficie S del dielettrico sia posta una densità superficiale di carica uguale in ogni punto alla componente normale del vettore polarizzazione (4.45) e che nel volume V sia contenuta una carica volumetrica uguale punto per punto alla divergenza cambiata di segno del vettore polarizzazione (4.46).

Questa osservazione ci permette di ricondurre il calcolo del potenziale generato da un volume di dielettrico polarizzato al calcolo del potenziale generato da distribuzioni di cariche superficiali e volumetriche. Vedremo che le cariche di polarizzazione sono effettivamente delle cariche che sorgono nel dielettrico per effetto della polarizzazione; si utilizza il termine *carica legata* per esprimere che le cariche di polarizzazione non sono libere di muoversi sulla superficie o all'interno del volume di dielettrico o di essere asportate da esso come avviene per le cariche dei conduttori. Per distinguere rispetto a questo tipo di cariche, dovute alla polarizzazione, indicheremo con il termine di *cariche libere* ogni altro tipo di carica. La densità di carica legata per unità di volume ρ_p risulta essere diversa da zero solo se la divergenza del vettore \mathbf{P} è diversa da zero. Nel caso in cui la polarizzazione sia uniforme, quando cioè il vettore $\mathbf{P}(x, y, z)$ non dipenda dalle coordinate spaziali, è immediato riconoscere che la densità di polarizzazione per unità di volume ρ_p è nulla. Va però osservato che ρ_p è nulla anche nel caso in cui il vettore $\mathbf{P}(x, y, z)$ sia non uniforme ma dipenda dalle coordinate spaziali in maniera tale che la sua divergenza risulti uguale a zero: è il caso per esempio di una polarizzazione \mathbf{P} che abbia una dipendenza spaziale del tipo \mathbf{r}/r^3 dove si è indicato al solito con \mathbf{r} il raggio vettore preso a partire dall'origine delle coordinate.

Tenendo conto della (4.45) e (4.46) abbiamo quindi che il potenziale nel punto \mathbf{r} è dato da:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (4.47)$$

Cerchiamo ora di giustificare da un punto di vista fisico l'insorgere in un dielettrico polarizzato della densità di carica di polarizzazione superficiale e volumetrica utilizzando un ragionamento basato su un semplice modello. Come abbiamo visto il fenomeno della polarizzazione di un dielettrico si riduce, in ultima analisi, alla separazione delle cariche positive e negative delle molecole del dielettrico, per cui ad ognuna di queste viene associato un momento dipolo. Questa considerazione è ovvia nel caso di polarizzazione per deformazione mentre per intenderla giustamente nel caso di polarizzazione per orientamento bisogna tenere presente che ciò che contribuisce a determinare il comportamento di un dielettrico non è il momento dipolo proprio della molecola ma la componente media del momento di dipolo proprio nella direzione del campo esterno. Considerando allora il valor medio del momento di dipolo proprio parallelo al campo elettrico possiamo prescindere dagli effetti dell'agitazione termica delle molecole e quindi, come nel caso delle molecole non polari, assegnare ad ogni molecola

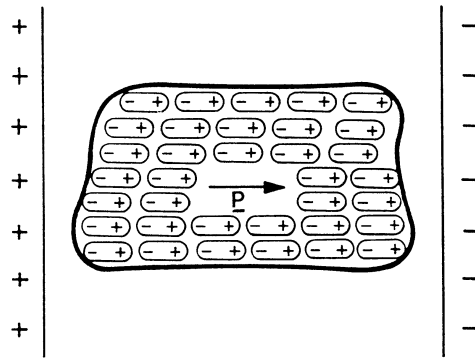


FIG. 4.12 - Blocco di materiale polarizzato. Ogni celletta rappresenta una molecola polarizzata od un elemento Δv di materiale polarizzato.

un momento di dipolo con un orientamento ben definito. Naturalmente si intuisce che tale valor medio dipenderà dalla temperatura. Arriviamo così alla conclusione che un volume di dielettrico polarizzato può essere visto come un insieme di tanti dipoli elettrici, come mostrato in Fig. 4.12.

Indicando con δ la distanza tra le cariche di questi dipoli e con q il modulo della carica di un singolo polo elettrico, il momento di dipolo elettrico associato ad ogni molecola risulterà essere $\mathbf{p}_m = q\delta$. Se assumiamo che nel dielettrico siano presenti N molecole per unità di volume potremo definire, in maniera equivalente alla (4.31), il vettore polarizzazione:

$$\mathbf{P} = Nq\delta .$$

(4.48)

Sia ΔS un elemento di superficie piana contenuto all'interno del dielettrico polarizzato e ϑ l'angolo formato tra la direzione del vettore polarizzazione \mathbf{P} in un punto di ΔS e la normale \mathbf{n} alla superficie nello stesso punto. Per effetto della polarizzazione, come abbiamo fatto notare, le cariche positive e negative subiscono uno spostamento relativo δ la cui direzione coincide con quella del vettore \mathbf{P} in quel punto. Le cariche che attraversano l'elemento di superficie ΔS a causa di questo spostamento sono quelle contenute nel prisma avente ΔS per base, spigoli paralleli a \mathbf{P} e di lunghezza δ , cioè:

$$\Delta Q_p = N q \Delta S \delta \cos \vartheta = \Delta S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.49)$$

Questa relazione mostra che la quantità di carica che attraversa l'elemento di superficie ΔS del dielettrico è uguale al prodotto di ΔS per la componente di \mathbf{P} nella direzione della normale alla superficie stessa. La (4.49) può essere interpretata come se la carica ΔQ_p fosse dovuta ad una distribuzione superficiale di carica di densità:

(4.50)

$$\sigma_p = \frac{\Delta Q_p}{\Delta S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} .$$

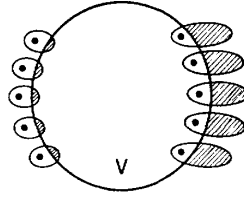


FIG. 4.13 - In punti diversi del volume V le molecole subiscono una differente deformazione. In V pertanto esisterà una densità di cariche di polarizzazione ρ_p diversa da zero

Si tenga però presente che se pensiamo ad una superficie immaginaria interna al dielettrico l'equazione (4.50) fornisce la carica che ha attraversato una sezione unitaria di essa ma non rappresenta un effettivo eccesso di densità di carica sulla superficie, poiché in realtà sulle due faccie di essa esistono contributi uguali in modulo e di segno opposto. In Fig. 4.12 si vede che questa compensazione non si verifica invece per la superficie delimitante il dielettrico sulla quale è presente una densità effettiva di carica $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.

Se il vettore polarizzazione $\mathbf{P}(x, y, z)$ non è uniforme in tutto il volume occupato dal dielettrico, lo spostamento delle cariche può portare al sorgere di una densità di carica di volume, come è mostrato per esempio in Fig. 4.13 dove è riportato un caso in cui l'elemento di volume sferico presenta un eccesso di carica positiva. Consideriamo ora un elemento di volume ΔV , contenuto nel dielettrico, delimitato da una superficie ΔS : in seguito alla polarizzazione ogni elemento di superficie sarà attraversato per la (4.50) da una quantità di carica $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da$. La variazione complessiva di carica relativa al volume ΔV si otterrà integrando su tutta la superficie ΔS che delimita il volume.

Tale variazione di carica fa sì che all'interno del volume vi sia un eccesso di carica ΔQ_p uguale ma di segno opposto a quello che ha attraversato la superficie ΔS . Avremo pertanto che:

$$\Delta Q_p = - \int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da . \quad (4.51)$$

Possiamo pensare che la quantità di carica ΔQ_p sia distribuita entro il volume ΔV con una densità ρ_p , cioè:

$$\Delta Q_p = \int_{\Delta V} \rho_p dv \quad (4.52)$$

per cui, uguagliando la (4.51) e la (4.52), otteniamo:

$$\int_{\Delta V} \rho_p dv = - \int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da . \quad (4.53)$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo integrale si ha:

$$\int_{\Delta V} \rho_p \, dv = \int_{\Delta V} -\operatorname{div} \mathbf{P} \, dv \quad (4.54)$$

e quindi

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} . \quad (4.55)$$

Possiamo così concludere che la divergenza di \mathbf{P} cambiata di segno fornisce la densità volumetrica di carica legata che si manifesta nel dielettrico.

È importante notare che anche nel caso della polarizzazione deve valere il principio della conservazione delle cariche. Di ciò è facile rendersi conto. Infatti sviluppando il problema precedente abbiamo iniziato col prendere in considerazione un dielettrico polarizzato ma elettricamente neutro e ci siamo ritrovati alla fine in presenza di distribuzioni di carica superficiali e volumetriche. Questo risultato è, da un punto di vista formale, riconducibile al procedimento matematico utilizzato per trasformare l'unico integrale della relazione (4.34) nei due integrali, uno di superficie ed uno di volume, della relazione (4.47).

È tuttavia immediato verificare che la somma delle cariche di polarizzazione è uguale a zero. Infatti se eseguiamo l'integrale sulla superficie S del dielettrico della distribuzione di carica σ_p e l'integrale sul volume V della distribuzione di carica ρ_p , troviamo:

$$Q_p = \int_S \sigma_p \, da + \int_V \rho_p \, dv . \quad (4.56)$$

Sostituendo nella (4.56) le relazioni (4.45) e (4.46) abbiamo:

$$Q_p = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_V -\operatorname{div} \mathbf{P} \, dv \quad (4.57)$$

e trasformando l'ultimo integrale mediante il teorema della divergenza ricaviamo che:

$$Q_p = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_V -\operatorname{div} \mathbf{P} \, dv \quad (4.58)$$

come volevamo dimostrare. In effetti quello che accade quando si ricompone il volume V del dielettrico riavvicinando i vari elementi di volume ΔV , ognuno dei quali elettricamente neutro per la (4.57), nei quali era stato scomposto, è che le densità superficiali di carica legata distribuite sulle superficie affacciate di due elementi di volume si compensano e quello che resta è in definitiva una distribuzione di carica sulla superficie esterna del dielettrico ed una carica all'interno del dielettrico.

Eseguendo il gradiente rispetto alla variabile \mathbf{r} del potenziale dato dalla formula (4.47) e cambiando poi di segno, ricaviamo infine l'espressione per il campo elettrico in un punto \mathbf{r} esterno al dielettrico. Operando in tal senso si ottiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S -\operatorname{grad} \frac{\sigma_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\operatorname{grad} \frac{\rho_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dv' . \quad (4.59)$$

Ricordando che

$$\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

e sostituendo in (4.59) deduciamo per il campo elettrico l'espressione finale :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\alpha' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (4.60)$$

il cui significato fisico appare del tutto immediato.

4.6 Campo elettrico all'interno di un dielettrico

Prima di affrontare il calcolo del campo elettrostatico all'interno in un dielettrico è necessario precisare cosa si debba intendere per campo elettrico in un mezzo materiale. Va subito detto che siamo interessati alla definizione di un campo elettrico macroscopico, un campo elettrico cioè che rappresenti un valore medio in un piccolo elemento di volume del materiale entro il quale è contenuto però un numero di molecole sufficientemente elevato. Una tale scelta è strettamente connessa alla impostazione che si è data nel paragrafo precedente dove si è considerato il dielettrico come un continuo caratterizzato, da un punto di vista elettrostatico, da una grandezza macroscopica quale il vettore polarizzazione $\mathbf{P}(x, y, z)$.

Per arrivare alla definizione del campo elettrico macroscopico all'interno del materiale possiamo utilizzare tre differenti procedimenti che non sono necessariamente, almeno a priori, fra loro completamente equivalenti.

1) Il primo di questi si basa su una definizione operativa del campo elettrico in un dielettrico, del tutto analoga a quella da noi adottata per il vuoto : si misura la forza che agisce su una carica di prova di dimensioni opportune, per esempio un elettrone posto in un punto A del mezzo, e si definisce intensità del campo elettrico o semplicemente campo elettrico nel punto A il rapporto tra la forza agente sull'elettrone e la carica. Tenendo però presente che il materiale è composto da un insieme di nuclei atomici e di elettroni, si può facilmente provare che il risultato di questa, operazione sarebbe quello di pervenire alla determinazione di un campo elettrico con modulo e direzione che risulterebbero funzioni assai irregolari e discontinue della posizione e del tempo. Infatti la forza in tal modo misurata varierebbe fortemente nello spazio, perché anche con piccoli spostamenti la carica di prova passerebbe da un punto prossimo ad un elettrone ad un punto prossimo ad un nucleo, e nel tempo a causa soprattutto del moto degli elettroni. Se vogliamo quindi determinare un campo elettrico macroscopico che caratterizzi il mezzo a prescindere dalla sua microstruttura sarà necessario calcolare il valor medio nel tempo e nello spazio di questo campo elettrico microscopico. Il campo elettrico macroscopico così calcolato rappresenterebbe la forza media che una carica unitaria risentirebbe nell'attraversare il materiale.

2) Un secondo procedimento consiste nel prendere in esame il campo elettrico che agisce su una singola molecola del dielettrico generato da tutte le altre molecole e dalle cariche libere e nel trovare una relazione tra questo campo e il campo elettrico macroscopico. Un esempio di calcolo di questo genere sarà esposto nel prossimo capitolo.

3) Un terzo procedimento consiste infine nel pensare di creare una cavità all'interno del dielettrico, di definire il campo elettrico in questa cavità come la forza che agisce su una carica ivi posta divisa per la quantità di carica, in maniera del tutto simile a quanto fatto nel vuoto, e di collegare tramite una opportuna relazione il campo elettrico nella cavità con il campo elettrico macroscopico nel dielettrico e quindi con la polarizzazione. Deve essere chiaro però che un tale metodo fa dipendere il valore del campo elettrico dalla particolare scelta della geometria della cavità e dal suo orientamento rispetto alla direzione del campo elettrico nel materiale. Il campo macroscopico sarà pertanto univocamente determinato solo se si farà riferimento ad una ben determinata scelta della cavità.

Per il calcolo del campo elettrico macroscopico all'interno del dielettrico utilizzeremo quest'ultimo metodo. Vogliamo innanzitutto far notare che una delle proprietà fondamentali del campo elettrostatico nel vuoto, e cioè il suo carattere conservativo, deve rimanere invariata anche all'interno dei materiali per quanto complicate possano essere le distribuzioni di cariche atomiche e molecolari.

Anche all'interno di un dielettrico deve perciò valere la relazione:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.61)$$

Prendiamo ora in esame un pezzo di dielettrico polarizzato di cui sia nota la funzione vettore di polarizzazione $\mathbf{P}(x, y, z)$ ed immaginiamo di scavare all'interno del suo volume una cavità cilindrica estremamente sottile, al limite un taglio, di volume V_0 e superficie S_0 , come è mostrato in maniera molto ingrandita in Fig. 4.14. Assumiamo inoltre che tale cavità non produca alcuna alterazione della polarizzazione già esistente del mezzo.

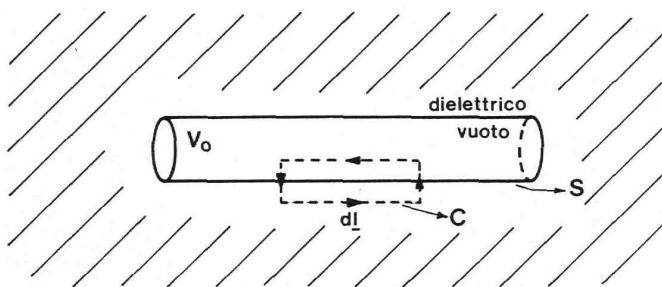


FIG. 4.14 - Cavità cilindrica scavata all'interno di un dielettrico.

Se calcoliamo la circuitazione (4.61) lungo il cammino rettangolare segnato a tratteggio nella figura già citata e trascuriamo i contributi dovuti al trasporto del vettore \mathbf{E} lungo i due lati minori (altezze), perché potremo sempre supporre di far tendere la loro lunghezza a zero, otteniamo:

$$\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.62)$$

e cioè che :

$$E_{0t} = E_{dt} \quad (4.63)$$

indicando con E_{0t} ed E_{dt} rispettivamente la componente tangente alla superficie laterale della cavità del campo elettrico nel vuoto e nel dielettrico. Se inoltre scegliamo la direzione dell'asse della cavità cilindrica in modo che sia parallela alla direzione del campo elettrico nel dielettrico abbiamo che $E_{dt} = E_d$. Arriviamo così a concludere che la componente longitudinale del campo elettrico nella cavità è uguale al campo elettrico nel dielettrico. Nel caso particolare in cui il *dielettrico sia isotropo*, nel caso cioè che le sue proprietà elettriche non dipendano dalla direzione che in esso si considera, sempre nell'ipotesi che *l'orientamento della cavità sia parallelo alla direzione del campo elettrico* nel dielettrico, è possibile dimostrare, come faremo in un paragrafo successivo, che il campo elettrico nella cavità risulta anch'esso longitudinale e che quindi vale la relazione

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_d \quad (4.64)$$

cioè che *il campo elettrico nella cavità sottile è uguale al campo elettrico nel dielettrico in un punto prossimo alla superficie della cavità*.

In quanto finora detto siamo spesso ricorsi, per caratterizzare la cavità cilindrica utilizzata nel nostro problema, all'espressione *estremamente sottile* senza fornire le necessarie precisazioni. A questo riguardo dobbiamo sempre ricordare che siamo interessati a definire delle quantità macroscopiche, delle quantità cioè mediate su regioni i cui volumi da un punto di vista microscopico non possono essere nulli ma da un punto di vista macroscopico sono molto piccoli, per cui ha senso parlare di volumi tendenti a zero. Per avere una idea più chiara su questo punto basti pensare che i volumi atomici hanno un ordine di grandezza di 10^{-24} cm^3 e che una regione per esempio con un volume di 10^{-6} cm^3 , e quindi con dimensioni lineari dell'ordine di 10^{-2} cm , contiene un numero di atomi dell'ordine di 10^{18} . Un tale volume, che è macroscopicamente molto piccolo, tanto da poterlo pensare fisicamente coincidente con un punto, risulta pur sempre molto grande se visto in scala microscopica, prendendo cioè come unità di misura le dimensioni atomiche. È proprio basandosi su considerazioni di questo tipo che si giustifica la definizione di un campo macroscopico funzione continua del punto.

Il risultato contenuto nelle relazioni (4.63) e (4.64) ci permette di risalire al valore del campo elettrico nel dielettrico mediante una misura del campo elettrico, o della sua componente longitudinale, nella cavità. Ma il campo elettrico nella cavità è un campo elettrico nel vuoto, in una regione quindi esterna al dielettrico; è allora possibile applicare in tale regione la formula (4.60), che

serve appunto a calcolare il campo elettrico generato da un dielettrico polarizzato in un punto esterno al suo volume. Bisogna tuttavia considerare attentamente il fatto che nella espressione (4.60) il campo elettrico è prodotto dalla distribuzione di cariche σ_p situata sulla superficie S del dielettrico e dalla distribuzione di cariche ρ_p distribuita all'interno del volume V . Quando però viene scavata una cavità nel dielettrico, si ha che sulla superficie S_0 della cavità appaiono delle densità superficiali di carica di polarizzazione, che non erano considerate nell'integrale superficiale della (4.60) e che una certa quantità di cariche di polarizzazione ρ_p , quelle che erano contenute nel volume V_0 , e che erano quindi considerate nell'integrale di volume della (4.60), non sono più presenti. Se si sceglie però per la cavità l'orientamento parallelo al campo elettrico nel dielettrico, che per semplicità supporremo isotropo, avremo che sulla superficie laterale della cavità il vettore \mathbf{P} non avrà componente normale, essendo in questo caso parallelo ad \mathbf{E}_d , e quindi la densità superficiale di carica legata σ_p sarà uguale a zero. Solamente sulle due superficie di base del cilindro appariranno delle densità di carica di polarizzazione ma se le dimensioni della cavità sono molto piccole il contributo dovuto a queste cariche al campo elettrico in un punto situato all'interno della cavità potrà essere considerato trascurabile. Un ragionamento analogo può essere fatto per quanto riguarda le cariche di polarizzazione per unità di volume ρ_p che erano contenute in V_0 e che ora sono escluse : se il volume della cavità è reso sufficientemente piccolo è praticamente indifferente eseguire l'integrale di volume (4.60) sul volume $V - V_0$ o su tutto il volume V . Concludiamo così che il campo elettrico in una cavità estremamente sottile è ricavabile dalla relazione (4.60) tenendo conto delle distribuzioni di carica di polarizzazione σ_p situate sulla superficie esterna S del dielettrico e delle cariche di polarizzazione volumetriche ρ_p contenute in tutto il volume V , come nel caso del calcolo del campo elettrico in un punto esterno al dielettrico. In particolare per un *dielettrico isotropo*, per il quale vale la relazione (4.64), si può affermare che la (4.60) *fornisce il campo elettrico, in punto \mathbf{r} , prodotto da un dielettrico polarizzato sia all'interno sia all'esterno del dielettrico.*

Siamo ora in grado di calcolare il *campo elettrico totale* all'interno di un dielettrico sommando al campo elettrico generato dalle distribuzioni di cariche libere, responsabili della polarizzazione, il campo elettrico prodotto dalle cariche di polarizzazione dato, come abbiamo visto, da :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\alpha' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (4.65)$$

D'altra parte però le cariche di polarizzazione σ_p e ρ_p possono essere calcolate solo se si conosce in ogni punto del dielettrico il valore del vettore polarizzazione $\mathbf{P}(x, y, z)$ che dipende non solo dal campo elettrico esterno applicato al dielettrico ma anche da quello prodotto dalla polarizzazione stessa; in altri termini esso dipende dal campo elettrico totale nel dielettrico che è proprio la quantità che stiamo cercando di determinare. Ci veniamo così a trovare in un circolo vizioso per uscire dal quale sarà necessario affrontare il problema in diversa maniera.

4.7 Il teorema di Gauss nei dielettrici

Per la soluzione di problemi pratici risulta di particolare utilità l'applicazione del teorema di Gauss, relativo al flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie chiusa, esteso al caso in cui siano presenti oltre alle cariche libere, cariche di polarizzazione.

Sia dato un blocco di materiale dielettrico all'interno del quale sia posta una carica libera Q distribuita per esempio su un conduttore di volume V' e superficie S' . Consideriamo una superficie chiusa S tutta contenuta nel dielettrico e a sua volta contenente la carica libera Q , come indicato in Fig. 4.15, e sia V il volume da essa racchiusa.

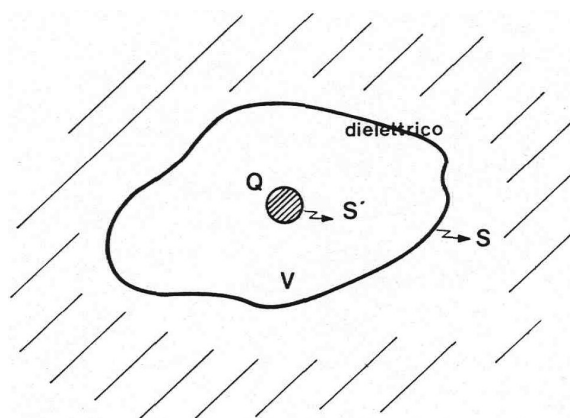


FIG. 4.15 - Carica libera Q distribuita su un conduttore di superficie S' contenuto all'interno di un dielettrico.

Osserviamo anzitutto che, per il modo stesso in cui è stato dedotto, il teorema di Gauss nel vuoto dovrà valere anche in un dielettrico qualsiasi pur di contare fra le sorgenti, oltre le cariche vere, quelle legate di polarizzazione. Infatti, come abbiamo visto, è l'insieme di queste cariche, vere e legate, che generano in un dielettrico il campo elettrico macroscopico totale \mathbf{E} . Avremo pertanto nel nostro caso che il flusso di \mathbf{E} attraverso la superficie S è dato da:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\alpha = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_p) \quad (4.66)$$

avendo indicato con Q_p tutte le cariche di polarizzazione, superficiali e volumetriche, contenute in S . In particolare per il problema in esame avremo che:

$$Q_p = \int_{S'} \sigma_p \, d\alpha + \int_{V-V'} \rho_p \, dv. \quad (4.67)$$

In questa espressione l'integrale superficiale è esteso alla superficie S' del conduttore perché questa è la sola superficie limite del dielettrico sulla quale è presente una distribuzione superficiale di carica. La superficie S non viene presa in considerazione poiché non rappresenta una superficie fisica limite del dielettrico. L'integrale di volume della relazione (4.67) è evidentemente esteso a tutto il volume delimitato da S meno il volume V' che è invece occupato dal conduttore. Utilizzando le definizioni $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ e $\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ la (4.67) può essere scritta nella forma:

$$Q_p = \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{V-V'} -\operatorname{div} \mathbf{P} \, dv . \quad (4.68)$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo integrale e tenendo conto che la superficie che limita il volume $V - V'$ è $S + S'$ avremo che:

$$Q_p = \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S+S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (4.69)$$

Sostituendo questa espressione nella (4.66) si ha:

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = Q - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (4.70)$$

e quindi:

$$\int_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \, da = Q .$$

È comodo a questo punto introdurre un nuovo vettore, combinazione dei due vettori \mathbf{E} e \mathbf{P} , dato da:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} . \quad (4.72)$$

Il vettore \mathbf{D} è chiamato *vettore spostamento elettrico* o *vettore induzione elettrica*. Questo vettore gode della proprietà che il suo flusso attraverso una superficie chiusa dipende solo dalle cariche libere contenute all'interno della superficie stessa. Infatti, come si può ricavare dalle (4.71) e (4.72):

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q . \quad (4.73)$$

La (4.73) è la formulazione matematica del teorema di Gauss in presenza di dielettrici. Se ora immaginiamo che la carica libera Q possa essere espressa come integrale di volume di una densità volumetrica di carica ρ contenuta in V avremo :

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \rho \, dv . \quad (4.74)$$

Utilizzando il teorema della divergenza per la trasformazione dell'integrale a sinistra e sfruttando l'arbitrarietà della scelta del volume V , dopo semplici passaggi si ottiene la seguente forma differenziale del teorema di Gauss:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (4.75)$$

A tutto rigore nel caso del vuoto non sarebbe necessario introdurre il vettore spostamento elettrico dato che, essendo in questo caso ovviamente $\mathbf{P} = 0$, esso per la relazione (4.72) si riduce a $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ e coincide quindi, a parte un fattore costante, con il vettore \mathbf{E} . Con ciò la relazione (4.75) nel vuoto, si riconduce, come deve essere, all'espressione (2.37) già ricavata nel paragrafo 2.7.

4.8 Suscettività e permittività dielettrica

Il grado di polarizzazione di un dielettrico dipende dall'ampiezza del campo elettrico applicato e naturalmente dal tipo di molecole che costituiscono il materiale. Anche nel seguito ci limiteremo a trattare quei materiali che presentano un vettore di polarizzazione \mathbf{P} nullo in assenza di campo elettrico esterno applicato. Tra il vettore polarizzazione ed il campo elettrico totale che agisce sul dielettrico esiste sempre una relazione, che può essere determinata per esempio sperimentalmente, del tipo:

$$\mathbf{P} = \chi_e(\mathbf{E}) \mathbf{E}. \quad (4.76)$$

La quantità $\chi_e(\mathbf{E})$ che prende il nome di *suscettività dielettrica* è una caratteristica intrinseca del materiale considerato, è una quantità sempre positiva, dipende generalmente dalla temperatura e può essere funzione del punto nel caso di materiali non omogenei. Nell'espressione (4.76) la suscettività dielettrica è stata considerata funzione anche dell'ampiezza del campo elettrico ma per i normali dielettrici è sperimentalmente dimostrabile che di tale dipendenza va tenuto conto solo per campi elettrici molto intensi. Se si esclude pertanto quest'ultima possibilità e i materiali che presentano un effettivo comportamento non lineare, la relazione tra polarizzazione e campo elettrico diventa una relazione lineare del tipo:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

(4.77)

La (4.76) non rappresenta in effetti la più generale relazione che si possa scrivere tra il vettore \mathbf{P} ed il vettore \mathbf{E} perché essa è valida solo per *dielettrici isotropi*, dielettrici cioè la cui polarizzazione non dipenda dalla direzione del campo elettrico applicato. Per i dielettrici isotropi la suscettività dielettrica è uno scalare e da questo deriva che il vettore polarizzazione è parallelo al vettore campo elettrico. Questo non è più vero nel caso dei cosiddetti *dielettrici anisotropi* per i quali invece la polarizzazione dipende dalla direzione del campo \mathbf{E} e il vettore \mathbf{P} in generale non è parallelo al vettore campo elettrico. Per questi materiali vale infatti una relazione del tipo:

$$\mathbf{P} = \chi_e (\mathbf{E}) \mathbf{E}. \quad (4.78)$$

in cui la quantità χ_e non è più uno scalare ma un tensore del secondo ordine. La relazione (4.78) può essere scritta anche nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} & \chi_{e13} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} & \chi_{e23} \\ \chi_{e31} & \chi_{e32} & \chi_{e33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

da cui, eseguendo il prodotto riga per colonna otteniamo:

$$\begin{aligned} P_x &= \chi_{e11} E_x + \chi_{e12} E_y + \chi_{e13} E_z \\ P_y &= \chi_{e21} E_x + \chi_{e22} E_y + \chi_{e23} E_z \\ P_z &= \chi_{e31} E_x + \chi_{e32} E_y + \chi_{e33} E_z \end{aligned}$$

Anche i materiali anisotropi possono presentare un comportamento lineare o non lineare, in quest'ultimo caso i singoli coefficienti χ_{ei} saranno funzione dell'ampiezza del campo elettrico. Per quanto riguarda questo capitolo ci limiteremo a considerare soltanto dielettrici isotropi, lineari e omogenei.

Se richiamiamo la relazione (4.72) per la quale $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e sostituiamo a \mathbf{P} l'espressione (4.77) abbiamo:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \mathbf{E} = (\epsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E}. \quad (4.81)$$

Questa relazione può scriversi anche :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.82)$$

ponendo :

$$\epsilon = (\epsilon_0 + \chi_e). \quad (4.83)$$

La quantità ϵ si chiama *costante dielettrica* o *permittività dielettrica* del mezzo. È utile introdurre anche una quantità adimensionale maggiore di uno indicata con ϵ_r e definita dalla relazione:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{\epsilon_0} \right). \quad (4.84)$$

Avremo così che $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. La grandezza ϵ_r viene indicata con il nome di : *costante dielettrica relativa* o *permittività dielettrica relativa* del mezzo rispetto al vuoto. Nel caso del vuoto evidentemente ϵ_r è uguale ad uno. Se il mezzo è isotropo lineare e omogeneo la permittività dielettrica è uno scalare indipendente dall'ampiezza del campo elettrico e dalla posizione. Dalla (4.82) deduciamo così che il vettore induzione elettrica è parallelo al vettore campo elettrico e

perciò, sempre nell'ipotesi di mezzo isotropo, concludiamo che i tre vettori **D**, **E** e **P** sono paralleli tra loro. Per un dielettrico anisotropo la permittività dielettrica è un tensore, il vettore **D** in generale non è parallelo ad **E** e la relazione (4.82) diviene:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E}. \quad (4.85)$$

Per ogni dielettrico esiste un valore limite dell'intensità del campo elettrico oltre il quale il dielettrico perde la sua proprietà di isolante presentando fenomeni di conduzione di cariche e dando luogo a scariche elettriche attraverso il suo volume. Tale valore limite viene indicato con il termine di *rigidità dielettrica*. Nella tabella 4.1 sono riportati i valori della costante dielettrica relativa e della rigidità dielettrica per alcuni dei materiali più comuni.

Tabella 4.1.1)

| Materiale | Costante dielettrica relativa | Rigidità elettrica (10 ⁶ volt/metro) |
|-----------------|-------------------------------|---|
| Aria 1 Atm. | 1,000590 | 3,1 |
| Benzene | 1,0028 | — |
| CO ₂ | 1,000985 | — |
| Alcool Etílico | 1,0061 | — |
| Paraffina | 2-2,5 | 8 |
| Polietilene | 2,3 | 18 |
| Poliestere | 2,8-5,2 | 9,8-20 |
| Gomma | 2,8 | 18 |
| Nylon | 3,5 | 18 |
| Albumina | 4,5-8,4 | 1,5-6,2 |
| Porcellana | 6-10 | 1,6-15 |
| Mica | 7-9 | 5-20 |
| Legno | 4-7 | — |
| Vetro Pyrex | 4-6 | 40-60 |
| Acqua 0 °C | 88 | — |

¹⁾ I valori riportati nella Tabella sono indicativi del comportamento di ogni materiale. Per alcuni materiali, la cui composizione è estremamente variabile, sono riportati gli intervalli di valori possibili. La maggior parte dei dati riportati sono tratti dall'Handbook of Chemistry and Physics, 50ª edizione pubblicato dalla «Chemical Rubber Co.».

4.9 Condizioni al contorno per i vettori **E** e **D**

Quanto esposto nei paragrafi precedenti di questo capitolo ci pone in grado di affermare che le proprietà elettrostatiche di un sistema, comprendente anche dei mezzi dielettrici, sono interamente descritte dalle due espressioni:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.86)$$

e

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q \quad (4.87)$$

o dalle corrispondenti espressioni differenziali:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (4.88)$$

e

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho \quad (4.89)$$

alle quali va associata la relazione tra il vettore \mathbf{E} ed il vettore \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}. \quad (4.90)$$

Vogliamo ora ricavare le condizioni che debbono essere soddisfatte dai vettori \mathbf{E} e \mathbf{D} su una superficie di separazione tra due mezzi diversi quali due dielettrici o un dielettrico ed un conduttore. Il vuoto viene ovviamente considerato come un dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r uguale ad uno. Supponiamo inoltre per maggior generalità che sul piano di separazione tra i due mezzi esista una distribuzione superficiale di carica libera $\sigma(x, y, z)$. Prendiamo in esame la superficie piana di separazione tra due mezzi isotropi, lineari, omogenei.

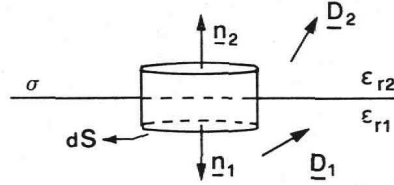


FIG. 4.16a) - Cilindro infinitesimo intersecato dalla superficie di separazione tra due dielettrici. Sulla superficie è posta una densità di carica libera σ .

Consideriamo il cilindro infinitesimo di Fig. 4.16 a) con generatrici perpendicolari al piano di separazione dei due mezzi, avente basi con superficie infinitesima dS poste una nel primo ed una nel secondo mezzo, ed *altezza* infinitesima di ordine superiore rispetto alle dimensioni lineari delle basi. Se per mezzo della (4.87) calcoliamo il flusso del vettore induzione elettrica attraverso la superficie di tale cilindro, trascurando i contributi dovuti alla superficie laterale dato che questa, al tendere a zero l'altezza del cilindro, diviene piccola a piacere, troviamo che:

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dS = \sigma dS \quad (4.91)$$

dove \mathbf{n}_1 ed \mathbf{n}_2 sono le normali alle basi del cilindro poste rispettivamente nel primo e nel secondo mezzo e σdS è la quantità di carica libera contenuta all'interno della superficie del cilindro. Poiché $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ la (4.91) diviene:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (4.92)$$

dove con D_{1n} e D_{2n} si sono indicate le componenti del vettore induzione elettrica nella direzione delle normali alle basi del cilindro. Dato che le considerazioni

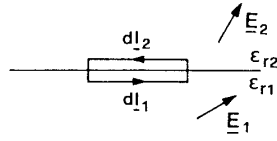


FIG. 4.16 b) - Cammino chiuso tracciato in un piano perpendicolare alla superficie di separazione tra due dielettrici e simmetrico rispetto ad essa.

che stiamo facendo rimangono valide facendo tendere a zero l'altezza del cilindro, la relazione (4.92) risulta valida per le componenti normali del vettore \mathbf{D} sulla superficie di separazione tra i due mezzi. Se su tale superficie di separazione non esiste una distribuzione di carica libera, cioè se $\sigma = 0$, la (4.92) si riduce a :

$$D_{1n} = D_{2n} . \quad (4.93)$$

In questo caso *la componente normale del vettore induzione elettrica non subisce discontinuità nel passare da un mezzo ad un altro.*

Sia dato ora il cammino chiuso C , mostrato in Fig. 4.16 b) di forma rettangolare con due lati (basi) di lunghezza infinitesima $d\mathbf{l}$ paralleli alla superficie di separazione dei due mezzi e i rimanenti due lati (altezze) perpendicolari alla superficie e di lunghezza infinitesima di ordine superiore. Eseguiamo lungo questo cammino la circuitazione del campo elettrico; indicando con \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 i campi nel primo e nel secondo mezzo e trascurando i contributi all'integrale provenienti dai due tratti di cammino coincidenti con le altezze del rettangolo, che possono essere rese piccole a piacere, si ricava che:

$$\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0. \quad (4.94)$$

Poiché $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2$ si ha in definitiva che :

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.95)$$

dove si sono indicate con E_{1t} ed E_{2t} , le componenti del campo elettrico tangenti alla superficie di separazione. Si dimostra così che *la componente del campo elettrico parallela alla superficie di separazione tra due mezzi diversi non subisce discontinuità passando da un mezzo all'altro.*

Se scriviamo la (4.93) utilizzando la relazione (4.90) tra il vettore \mathbf{D} ed il vettore \mathbf{E} nei due mezzi supponendo che essi siano dielettrici caratterizzati da costanti dielettriche relative ϵ_{r1} ed ϵ_{r2} , troviamo:

$$\epsilon_{r1} \epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_{r2} \epsilon_0 E_{2n} \quad (4.96)$$

cioè

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} . \quad (4.97)$$

4.10 Carica libera immersa in un dielettrico infinitamente esteso

Per meglio comprendere il significato dell'introduzione del vettore \mathbf{D} per la soluzione dei problemi di elettrostatica in presenza di materiali dielettrici, illustreremo un esempio molto semplice. Consideriamo una carica libera q immersa in un dielettrico isotropo lineare omogeneo e illimitato caratterizzato da una costante dielettrica relativa ϵ_r . Vogliamo determinare il campo elettrico totale e il vettore polarizzazione in ogni punto del dielettrico e le cariche superficiali e volumetriche di polarizzazione. Evidentemente non è possibile calcolare direttamente il campo elettrico totale perché questo dipende dalla polarizzazione e la polarizzazione d'altra parte è a sua volta proporzionale al campo elettrico totale. Possiamo tuttavia superare questa difficoltà facendo uso del teorema di Gauss nella forma (4.73). Sia data una superficie sferica S , di raggio r e centro coincidente con quello della carica q e calcoliamo il flusso del vettore induzione elettrica. Avremo che:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = q. \quad (4.98)$$

Il vettore \mathbf{D} , come nel caso del campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto, avrà direzione radiale uscente dalla carica e sarà uniforme su una sfera concentrica rispetto al punto in cui è posta la carica q . Calcolando perciò l'integrale della (4.98) utilizzando questa proprietà del vettore \mathbf{D} si ha:

$$D(r)4\pi r^2 = q \quad (4.99)$$

e quindi:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.100)$$

Una volta determinato il vettore induzione elettrica è immediato ricavare il campo elettrico totale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r})}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.101)$$

Il campo elettrico generato da una carica q posta nel dielettrico ha dunque una espressione simile a quella che aveva nel vuoto con la sola importante differenza che il suo modulo è ridotto di un fattore $1/\epsilon_r$. Questo risultato può essere giustificato tenendo conto che la carica q in pratica è una carica macroscopica e per quanto piccola occupa un certo volume che possiamo pensare avere la forma di una sferetta di raggio a . La superficie di separazione tra la carica q e il dielettrico è una superficie limite del dielettrico sulla quale pertanto esisterà una distribuzione superficiale di cariche di polarizzazione $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.

Il vettore polarizzazione in un certo punto r del dielettrico, utilizzando la relazione $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ e la (4.101), è dato da:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{q\chi_e}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.102)$$

e poiché $\chi_e = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$ la (4.102) diviene:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.103)$$

Se supponiamo che la carica libera sia una sfera di raggio a la densità superficiale di carica di polarizzazione su di essa sarà pertanto:

$$\sigma_p = -\frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \frac{1}{a^2}. \quad (4.104)$$

Il segno meno è dovuto al fatto che nella definizione $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ il versore \mathbf{n} rappresenta la normale esterna alla superficie del dielettrico e nel nostro caso è quindi diretto in verso opposto al vettore \mathbf{P} . La carica totale di polarizzazione sulla sfera di raggio a è allora:

$$q_p = -q \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}. \quad (4.105)$$

Poiché sappiamo che il campo elettrico in un dielettrico ha come sorgenti sia le cariche vere sia quelle di polarizzazione potremo scrivere che la carica totale che genera il campo elettrico \mathbf{E} è data da:

$$q + q_p = \frac{q}{\epsilon_r} \quad (4.106)$$

risultato che giustifica pienamente la relazione (4.101) ricavata precedentemente. In altri termini possiamo dire che, a causa della polarizzazione, intorno alla carica libera q si manifesta una carica di polarizzazione di segno opposto che tende a schermare gli effetti elettrostatici da essa prodotti, in modo tale che il campo elettrico risulta quello che sarebbe prodotto nel vuoto da una carica di valore q/ϵ_r . Per quanto riguarda la carica di polarizzazione per unità di volume ρ_p , è facile dimostrare che essa è nulla. Infatti il vettore polarizzazione, che in questo caso non è uniforme, ha una dipendenza dalla variabile spaziale tale da rendere la sua divergenza nulla. Questo può essere visto ricordando che $\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{grad} \frac{1}{r}$ e che,

come dimostrato nel paragrafo 3.3, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$. Si ha allora che:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{P} &= \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \text{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \text{div} \mathbf{grad} \frac{1}{r} = \\ &= -\frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \nabla^2 \frac{1}{r} = 0. \end{aligned} \quad (4.107)$$

D'altra parte sappiamo anche che la somma delle cariche di polarizzazione deve essere nulla; bisogna quindi immaginare che una quantità di carica di

polarizzazione uguale a quella data dalla (4.105) e di segno opposto sia distribuita sulla superficie all'infinito del dielettrico.

4.11 Campo elettrico generato da una sfera di dielettrico uniformemente polarizzato

Sia data una sfera di raggio a di dielettrico uniformemente polarizzato e caratterizzato da un vettore di polarizzazione \mathbf{P} . Vogliamo determinare il campo elettrico prodotto dal dielettrico in punti interni ed esterni al suo volume. A questo scopo si può immaginare, secondo quanto abbiamo già detto, che l'effetto della polarizzazione sul dielettrico sia di produrre una separazione δ nella direzione del vettore \mathbf{P} tra le cariche negative e quelle positive delle molecole. Inoltre se il dielettrico è composto da N molecole è possibile definire, come nel paragrafo 4.6, il vettore polarizzazione mediante la relazione $\mathbf{P} = Nq\delta$ dove $q\delta$ rappresenta il momento di dipolo di una singola molecola dovuto alla separazione di cariche. La sfera di dielettrico polarizzato può essere allora assimilata, con buona approssimazione, a un sistema di due sfere uniformemente cariche, con densità volumetrica di carica $\pm \rho = \pm Nq$, i cui centri, che risulterebbero coincidenti in assenza di polarizzazione, risultano separati, a causa di questa, nella direzione del vettore \mathbf{P} di una distanza δ , come è mostrato in Fig. 4.17.

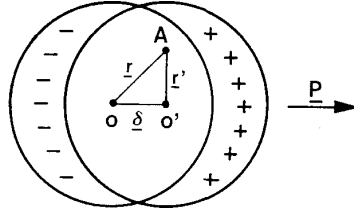


FIG. 4.17 - A causa della polarizzazione le cariche positive e negative delle molecole contenute in una sfera di materiale dielettrico subiscono una separazione δ .

Il campo elettrico generato dal dielettrico polarizzato in un punto A contenuto nel dielettrico è pertanto la somma dei due campi elettrici generati in A separatamente dalle due distribuzioni volumetriche di carica. Nel paragrafo 2.8 *b*) abbiamo dimostrato che il campo elettrico in un punto interno ad una distribuzione sferica uniforme di carica, distante \mathbf{r} dal centro della sfera, è dato da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}. \quad (4.108)$$

Se indichiamo rispettivamente con \mathbf{r} ed \mathbf{r}' la distanza del punto A contenuto nel dielettrico dai centri O ed O' delle due distribuzioni di carica abbiamo:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{Nq}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.109)$$

Risulta evidente dalla Fig. 4.17 che la quantità $r - r'$ è uguale a $-\delta$, cioè alla distanza tra i centri delle due sfere cambiata di segno. Il campo elettrico in A risulta così:

$$\mathbf{E} = -\frac{Nq}{3\epsilon_0} \delta = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (4.110)$$

espressione che mostra chiaramente come il campo all'interno della sfera di dielettrico polarizzato sia uniforme.

Per calcolare il campo elettrico in un punto esterno al dielettrico possiamo considerare le cariche totali delle due distribuzioni sferiche concentrate nei punti O ed O' . Mediante tale schematizzazione la sfera di dielettrico polarizzato assume l'aspetto di un dipolo finito di momento:

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \delta = \frac{4}{3} \pi a^3 \mathbf{P} . \quad (4.111)$$

Supponendo che il vettore polarizzazione \mathbf{P} sia diretto parallelamente all'asse y e utilizzando la relazione (4.9) otteniamo che il campo elettrico in un punto situato sullo stesso asse è dato da:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3} = \frac{2a^3}{3\epsilon_0} \frac{P}{y^3} . \quad (4.112)$$

Per $y = a$, in un punto cioè sulla superficie della sfera, abbiamo che la componente del campo elettrico vale:

$$E_y(a) = \frac{2P}{3\epsilon_0} . \quad (4.113)$$

Risulta così, come si vede anche in Fig. 4.18, che in un punto della superficie del dielettrico la componente del campo elettrico esterno nella direzione del

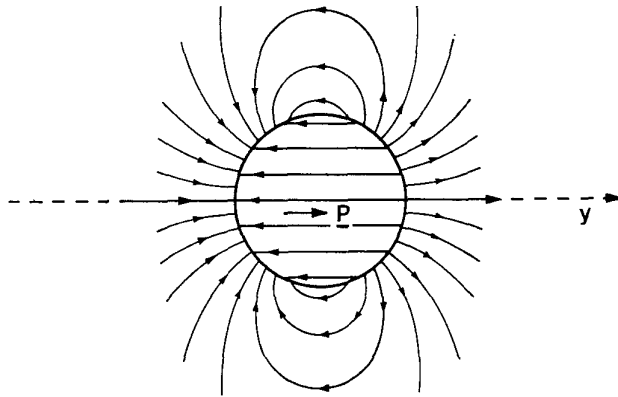


FIG. 4.18 - Linee di forza del campo elettrico prodotto da una sfera di dielettrico uniformemente polarizzato.

vettore polarizzazione ha direzione opposta a quella del campo elettrico interno alla sfera. Inoltre all'esterno il campo elettrico ha valore doppio di quello che ha all'interno. Ciò può essere spiegato tenendo conto che sulla superficie della sfera esiste una distribuzione di carica $\sigma_p = P_n$ e ricordando che nel paragrafo 2.8 c) abbiamo dimostrato che quando si attraversa una distribuzione superficiale di carica σ la componente normale del campo elettrico subisce una discontinuità pari a σ/ϵ_0 .

4.12 Sfera di dielettrico in un campo elettrico uniforme

Poniamo una sfera di raggio a di dielettrico isotropo, lineare, omogeneo con costante dielettrica ϵ_r in una regione dello spazio ove agisca un campo uniforme \mathbf{E}_0 e supponiamo che la distribuzione delle cariche sorgenti del campo elettrico \mathbf{E}_0 non venga modificata dalla presenza del dielettrico. Il campo elettrico totale in ogni punto dello spazio sarà allora dato dalla somma del campo elettrico \mathbf{E}_0 più il campo elettrico \mathbf{E}_p generato dalla sfera polarizzata:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p. \quad (4.114)$$

Risolviamo dapprima il problema del calcolo di \mathbf{E} in un punto interno alla sfera. Nel paragrafo precedente con la relazione (4.110) abbiamo calcolato il campo elettrico prodotto da una sfera di dielettrico polarizzato con polarizzazione uniforme \mathbf{P} in un punto interno al suo volume. Se noi assumiamo che la polarizzazione prodotta dal campo elettrico totale \mathbf{E} nel nostro caso sia uniforme, possiamo sostituire la (4.110) al posto di \mathbf{E}_p nella (4.114) e, ricordando che $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, ottenere :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{\chi_e}{3\epsilon_0} \mathbf{E}. \quad (4.115)$$

Con alcuni semplici passaggi, e poiché $\chi_e = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$ si trova infine che il campo elettrico totale all'interno del dielettrico è:

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0. \quad (4.116)$$

Poiché ϵ_r è una quantità positiva maggiore di uno, dalla (4.116) risulta che il campo elettrico \mathbf{E} all'interno del dielettrico è più piccolo del campo elettrico \mathbf{E}_0 . Noto il campo elettrico totale nella sfera è facile risalire al valore del vettore di polarizzazione \mathbf{P} tramite la solita relazione $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$. Si ha allora che:

$$\mathbf{P} = \chi_e \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)} \mathbf{E}_0 \quad (4.117)$$

Troviamo così, in accordo con quanto supposto, che il vettore polarizzazione è uniforme in tutto il dielettrico.

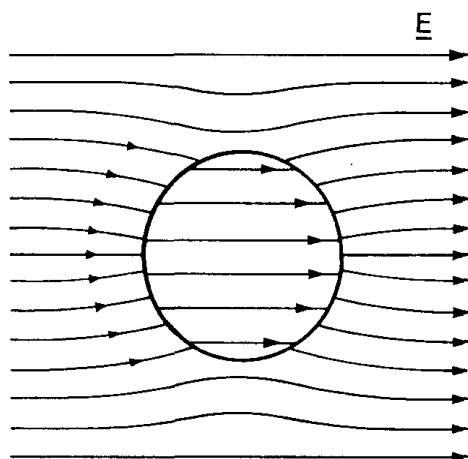


FIG. 4.19 - Sfera di dielettrico posta in un campo elettrico inizialmente uniforme. Le linee di forza del campo prossime alla sfera vengono deformate e il campo elettrico interno al materiale risulta inferiore a quello preesistente nel vuoto.

La relazione (4.114) è valida anche per il calcolo del campo elettrico totale in un punto esterno alla sfera di dielettrico. Conformemente alla schematizzazione adottata al paragrafo precedente, il campo elettrico E_p è ora il campo elettrico prodotto da un dipolo finito, posto al centro della sfera, orientato parallelamente ad E_0 e con un momento di dipolo uguale a quello dato dalla (4.111). L'andamento delle linee di forza del campo E all'interno e all'esterno della sfera di dielettrico è mostrato in Fig. 4.19.

4.13 Condensatore piano con dielettrico

Vogliamo ora esaminare come vengano modificate le caratteristiche elettrostatiche di un condensatore quando tra le sue armature venga posto uno strato di materiale dielettrico. La capacità di un condensatore piano ideale, costituito da due armature di superficie S separate nel vuoto da una distanza l , è $C_0 = \epsilon_0 S/l$. Immaginiamo di caricare questo condensatore con una certa quantità di carica Q e di disinserire successivamente il generatore utilizzato a questo scopo. Introduciamo quindi tra le piastre del condensatore uno strato di dielettrico isotropo lineare ed omogeneo di costante dielettrica relativa ϵ_r e spessore x . La nuova situazione sperimentale sia quella mostrata in Fig. 4.20. Indichiamo con x_1 e x_2 gli spessori degli strati laterali lasciati vuoti dal dielettrico nel condensatore in modo che $x_1 + x_2 + x = l$. Per il principio di conservazione delle cariche in un sistema isolato la quantità di carica libera posta sulle armature del condensatore deve restare inalterata anche dopo l'introduzione del dielettrico. Inoltre nell'ipotesi di condensatore piano ideale, nell'ipotesi cioè che le dimensioni lineari delle armature siano molto maggiori della distanza tra loro esistente, le distribuzioni di cariche libere $\pm \sigma$ sulle armature rimarranno uniformi. Lo strato di dielettrico del condensatore si polarizzerà uniformemente con un vettore di polarizzazione \mathbf{P} che risulterà parallelo al campo elettrico già esistente nel

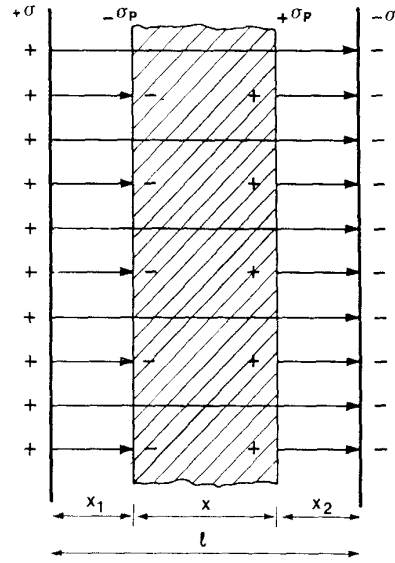


FIG. 4.20 - Strato di dielettrico posto tra le armature di un condensatore piano.

vuoto e che sappiamo essere diretto dalla piastra carica positivamente a quella carica negativamente. Per la geometria del problema e la natura del dielettrico i vettori \mathbf{E} , \mathbf{P} e \mathbf{D} risulteranno quindi tra loro paralleli.

Per quanto detto nei paragrafi precedenti, sappiamo che gli effetti elettrostatici di un dielettrico polarizzato possono essere completamente descritti mediante distribuzioni superficiali e volumetriche di cariche legate. Nell'esempio considerato la polarizzazione è uniforme, quindi la densità volumetrica ρ_p sarà nulla e gli effetti legati alla polarizzazione potranno essere rappresentati per mezzo di due sole distribuzioni superficiali di cariche $\pm \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ situate sulle superficie laterali dello strato di dielettrico. Il problema si riduce allora al calcolo del campo elettrico prodotto da una coppia di doppi strati di carica: il primo con distribuzioni $\pm \sigma$ ed il secondo, interno al primo, con distribuzione $\pm \sigma_p$. Avendo già dimostrato che un doppio strato di carica genera al suo esterno un campo elettrico nullo possiamo affermare che nelle due regioni laterali, di lunghezza x_1 e x_2 , comprese tra il primo ed il secondo doppio strato, il campo elettrico non dipenderà dalle distribuzioni di carica $\pm \sigma_p$ e sarà perciò $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. Nella regione invece compresa nel doppio strato interno $\pm \sigma_p$ il campo elettrico sarà la somma dei campi elettrici generati da ciascuno dei doppi strati e cioè:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}. \quad (4.118)$$

Il segno meno davanti al secondo termine è dovuto al fatto che il campo elettrico del doppio strato $\pm \sigma_p$ è diretto in verso opposto a quello prodotto

dal doppio strato + a , come può essere visto anche in Fig. 4.20. Tale campo elettrico prende il nome di *campo di depolarizzazione*.

Per ricavare il valore della distribuzione superficiale di cariche di polarizzazione σ_p , come al solito, dovremmo prima conoscere il valore del campo elettrico totale. Questa difficoltà è superabile utilizzando la condizione di continuità per la componente normale del vettore induzione elettrica \mathbf{D} attraverso la superficie di separazione tra vuoto e dielettrico nel condensatore. In questo caso poi la situazione è particolarmente semplice perché il vettore \mathbf{D} è normale alla superficie di separazione, per cui sarà $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_d$. Per il vettore induzione elettrica nel vuoto sappiamo che vale inoltre la relazione:

$$D_0 = \epsilon_0 E_0 = \sigma \quad (4.119)$$

mentre il vettore induzione elettrica nel dielettrico soddisfa la condizione:

$$D_d = \epsilon_0 E + P \quad (4.120)$$

dove E è il campo elettrico totale. Eguagliando la (4.119) e la (4.120) otteniamo:

$$\epsilon_0 E + P = \sigma. \quad (4.121)$$

Ricordando poi che $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ dalla (4.121) ricaviamo la seguente espressione per il campo elettrico totale:

$$E = \frac{\sigma}{(\epsilon_0 + \chi_e)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (4.122)$$

pertanto all'interno dello strato di dielettrico il campo elettrico risulta essere uniforme e minore di quello esistente nel vuoto di un fattore ϵ_r .

A questo punto è immediato ricavare l'espressione per il vettore polarizzazione:

$$P = \chi_e E = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \sigma \quad (4.123)$$

e per la densità superficiale di carica

$$\sigma_p = P = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \sigma. \quad (4.124)$$

Poiché la differenza di potenziale tra le armature del condensatore è data da :

$$\Delta\varphi = \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.125)$$

dove l'integrale è calcolato lungo una linea retta orientata dall'armatura positiva a quella negativa, ricordando quanto detto per i campi elettrici nelle regioni di vuoto e di dielettrico nel condensatore, possiamo scrivere che:

$$\Delta\varphi = E_0 x_1 + E x + E_0 x_2 \quad (4.126)$$

cioè che:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (x_1 + x_2) + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} \right) x. \quad (4.127)$$

Ma per la (4.124) questa diviene:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (x_1 + x_2 + x) - \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma x \quad (4.128)$$

relazione che con semplici calcoli e ricordando che $x_1 + x_2 + x = l$ si scrive anche:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left[(l - x) + \frac{x}{\varepsilon_r} \right]. \quad (4.129)$$

Per la definizione di capacità di un condensatore piano $C = Q / \Delta\varphi$ e poiché nel nostro caso $Q = \sigma S$ abbiamo che la capacità del condensatore contenente lo strato di dielettrico è:

$$C = \frac{\sigma S}{\Delta\varphi} = \frac{S \varepsilon_0}{\left[(l - x) + \frac{x}{\varepsilon_r} \right]}. \quad (4.130)$$

Poiché ε_r è una quantità positiva maggiore di uno il denominatore della (4.130) risulta minore di quello corrispondente nell'espressione della capacità del condensatore nel vuoto. La capacità del condensatore con dielettrico è pertanto maggiore di quella del condensatore nel vuoto. Nel caso in cui il dielettrico riempisse completamente il condensatore, nel caso in cui cioè $x = l$, dalle (4.122), (4.129) e (4.130) si avrebbe che:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (4.131)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} l \quad (4.132)$$

$$C = \frac{S \varepsilon_0 \varepsilon_r}{l}. \quad (4.133)$$

È possibile pertanto affermare che *in un condensatore piano completamente riempito di dielettrico, a parità di cariche libere sulle armature, il campo elettrico e la differenza di potenziale tra le piastre sono inferiori di una quantità ε_r rispetto ai valori che si hanno per lo stesso condensatore nel vuoto, mentre la capacità risulta maggiore della medesima quantità ε_r .*

4.14 Energia del campo elettrostatico

Nel paragrafo 3.11 abbiamo calcolato l'energia elettrostatica del sistema di N conduttori. Utilizzando il vettore induzione elettrica \mathbf{D} è possibile porre in una forma estremamente importante e molto generale l'espressione dell'energia elettrostatica di un sistema costituito da una distribuzione di carica volumetrica ρ e da una distribuzione di carica superficiale σ . Consideriamo un sistema formato da N conduttori con superficie S_1, S_2, \dots, S_N . Riscriviamo la (3.133) tenendo conto che per il teorema di Gauss $\rho = \text{div } \mathbf{D}$ e che $\text{div } (\varphi \mathbf{D}) = \varphi \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \text{grad } \varphi$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div } \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \text{div } (\varphi \mathbf{D}) \, dv - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \text{grad } \varphi \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \text{div } (\varphi \mathbf{D}) \, dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da . \end{aligned} \quad (4.134)$$

Notiamo che nel secondo integrale dell'ultima espressione abbiamo fatto uso della relazione $\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi$. Applicando il teorema della divergenza al primo integrale di volume otteniamo:

$$W = \frac{1}{2} \int_{S_v} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da . \quad (4.135)$$

In generale S rappresenterà la superficie complessiva dei differenti conduttori presenti nel sistema e V il volume esterno a questi conduttori (il volume interno non può dare alcun contributo).

La superficie S_v che delimita il volume V sarà composta da una superficie limite all'infinito e dalle superficie dei singoli conduttori. Poiché φ varia come $\frac{1}{r}$, \mathbf{D}

come $\frac{1}{r^2}$ e da come r^2 , avremo che l'integrale esteso alla superficie all'infinito si annulla. D'altra parte la normale \mathbf{n} alla superficie S_v è diretta verso l'interno dei conduttori, quindi la componente del vettore \mathbf{D} in tale direzione è uguale a $-\sigma$. La (4.135) in conclusione diviene:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 \, dv . \quad (4.136)$$

L'espressione (4.136) fornisce il lavoro necessario per produrre nel vuoto un campo elettrico $\mathbf{E}(x, y, z)$ in un certo volume V . In base ad essa si può pensare che il lavoro speso per portare le cariche sui conduttori viene ritrovato sotto forma di energia associata al campo elettrico; tale energia risulta cioè distribuita nello spazio, nelle zone in cui il campo elettrico è diverso da zero. Secondo

questo modo di vedere ha significato parlare di una *densità di energia* elettrostatica, intendendo per essa l'energia per unità di volume. Essa risulta data da:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 . \quad (4.137)$$

Più precisamente diremo che se in un punto P dello spazio il campo elettrico ha il valore \mathbf{E} la grandezza $w \, dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, dv$ fornisce l'energia elettrostatica contenuta in un elemento di volume infinitesimo dv centrato intorno al punto P .

5

Aspetti molecolari della teoria dei dielettrici

5.1 Il campo elettrico molecolare

Nel capitolo precedente abbiamo trattato i fenomeni elettrostatici nei dielettrici polarizzati, da un punto di vista macroscopico. Vogliamo ora collegare le grandezze macroscopiche introdotte in questa trattazione con le caratteristiche delle molecole di cui il materiale è costituito e in particolare vogliamo ricercare una relazione tra il campo elettrico macroscopico e il campo elettrico che effettivamente agisce su una singola molecola.

Chiameremo *campo elettrico molecolare*, E_m , il campo elettrico agente in un punto, ove è posta una molecola, generato da tutte le cariche libere e da tutte le molecole polarizzate, con l'esclusione di quella che è nel punto preso in esame: questo è il campo elettrico dal quale dipende la polarizzazione della molecola.

Per calcolare tale campo prendiamo come esempio un condensatore piano di dimensioni tali da poter trascurare gli effetti ai bordi, sulle armature del quale esistano due distribuzioni di carica $\pm\sigma$ e contenente uno strato di dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo, che non riempia completamente lo spazio tra le armature. Per quanto riguarda lo strato di dielettrico polarizzato vale quanto detto nell'ultimo paragrafo del precedente capitolo. Supponiamo di voler determinare il campo elettrico E_m agente su una determinata molecola. Per far questo immaginiamo di rimuovere dal dielettrico la molecola in questione e di considerare all'interno del dielettrico una sfera S centrata nel punto precedentemente occupato dalla molecola, come mostrato in Fig. 5.1. Il volume V della sfera abbia dimensioni grandi da un punto di vista microscopico ma piccole

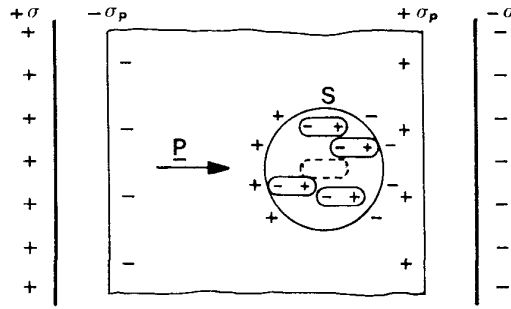


FIG. 5.1 - La superficie sferica S , interna al materiale, separa la regione del dielettrico che interagisce macroscopicamente con la molecola, indicata a tratteggio, dalla regione che interagisce con essa microscopicamente.

da un punto di vista macroscopico. Il significato di questa superficie sferica è quello di separare la regione del dielettrico, in cui potremo trattare in maniera macroscopica le interazioni con la molecola, dalla regione del dielettrico, quella entro la sfera, per la quale l'interazione con la molecola fissata sarà valutata tenendo conto esplicitamente della struttura microscopica del dielettrico. La superficie sferica S va pertanto considerata come una vera superficie limite che divide la regione del dielettrico polarizzato, riguardato come un mezzo continuo, da una regione di vuoto contenente singole molecole polarizzate.

Il campo elettrico \mathbf{E}_m nel punto ove era posta la molecola presa in considerazione risulta essere la somma dei seguenti campi elettrici:

- 1) campo elettrico \mathbf{E}_a dovuto alle distribuzioni superficiali di cariche libere $\pm\sigma$ situate sulle armature del condensatore;
- 2) campo elettrico di depolarizzazione \mathbf{E}_d dovuto alle distribuzioni superficiali di cariche legate $\pm\sigma$ situate sulle superficie del dielettrico affacciate al condensatore ;
- 3) campo elettrico \mathbf{E}_s dovuto alla distribuzione superficiale di carica legata situata sulla superficie sferica S .
- 4) campo elettrico \mathbf{E}_i dovuto alle singole molecole polarizzate, ad eccezione di quella in esame, contenute nella sfera S . Potremo pertanto scrivere:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i. \quad (5.1)$$

Per la continuità della componente normale del vettore induzione elettrica \mathbf{D} sulla superficie laterale di separazione tra vuoto e dielettrico e tenendo conto che nel nostro caso il vettore induzione elettrica nel vuoto e quello del dielettrico sono entrambi normali alla superficie di separazione, si ricava che il vettore \mathbf{D} ha lo stesso valore nei due mezzi. Essendo nel vuoto $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_a$ e nel dielettrico $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, si ha:

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (5.02)$$

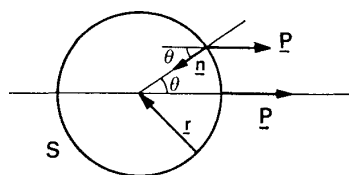


FIG. 5.2 - Costruzione per il calcolo del campo elettrico nel centro della sfera S prodotto dalla distribuzione superficiale di cariche di polarizzazione $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.

dove con \mathbf{E} si è indicato il campo elettrico macroscopico nel dielettrico.

Il campo elettrico di depolarizzazione \mathbf{E}_d , che è diretto in verso opposto al campo elettrico \mathbf{E}_0 e al vettore polarizzazione \mathbf{P} , è dato da:

$$\mathbf{E}_d = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (5.3)$$

essendo in questo caso $\sigma_p = P$.

Sulla superficie S della sfera esiste una distribuzione di cariche legate $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, per cui un elemento da di tale superficie produce al centro della sfera di raggio r un campo elettrico:

$$d\mathbf{E}_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \right) \mathbf{r} da \quad (5.4)$$

ove il versore \mathbf{n} , normale esterna alla superficie S , risulta rivolto verso l'interno della sfera, ed \mathbf{r} è orientato dall'elemento di superficie da al centro della sfera. Per la geometria del sistema due elementi della superficie sferica S simmetrici rispetto al centro producono in questo punto due campi elettrici di modulo uguale ma diretti in modo tale che le componenti normali alla direzione di \mathbf{P} si annullano e le componenti parallele a \mathbf{P} si sommano. Risulta così che il campo prodotto da tutti gli elementi di superficie della sfera è diretto parallelamente al vettore \mathbf{P} e che nella relazione (5.4) si può tener conto della sola componente in questa direzione. Denotando con ϑ l'angolo tra \mathbf{P} ed \mathbf{n} , come mostrato in Fig. 5.2, ed esprimendo l'elemento di superficie da in coordinate polari, per cui $da = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$, si ha che il campo al centro della sfera risulta dato dall'espressione :

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (-P \cos \vartheta) (-\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (5.5)$$

Eseguendo l'integrazione otteniamo:

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (5.6)$$

Se sostituiamo le relazioni (5.2), (5.3) e (5.6) nella (5.1) si ha:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} + \mathbf{E}_i . \quad (5.7)$$

A questo punto rimane da calcolare solo il campo \mathbf{E}_i generato dalle singole molecole polarizzate contenute in S . Nel caso che tali dipoli abbiano una distribuzione simmetrica, per esempio nel caso di una sostanza con un reticolo cristallino cubico, è possibile dimostrare che il campo elettrico \mathbf{E}_i è nullo. Inoltre questo termine risulta nullo anche se le molecole sono disposte in maniera completamente casuale, come avviene per le sostanze amorfe, esempio tipico il vetro, e generalmente per le sostanze gassose o liquide. Prendiamo in esame, per illustrare con un esempio quanto ora asserito, un materiale appartenente a questa seconda categoria. Il campo elettrico generato da un dipolo di momento \mathbf{p} in un punto \mathbf{r} secondo la (4.8) è:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] . \quad (5.8)$$

Questa espressione fornisce anche il campo elettrico generato da un dipolo di momento elettrico \mathbf{p} in un punto preso come origine del sistema di riferimento e da cui il dipolo dista \mathbf{r} ; nel problema considerato tale punto è il centro della sfera. La componente lungo l'asse delle x del campo elettrico \mathbf{E}_i generato al centro di S da tutti i dipoli contenuti nella sfera è allora:

$$E_{ix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \left[\frac{3 (p_x x^2 + p_y xy + p_z xz)}{r^5} - \frac{p_x}{r^3} \right] \quad (5.9)$$

ove la sommatoria \sum si intende estesa a tutti i dipoli contenuti nella sfera.

Poiché i dipoli sono sistemati rispetto al centro in maniera casuale la parte di sommatoria relativa ai termini contenenti i prodotti xy , xz e yz sarà uguale a zero. Essendo inoltre le tre direzioni x , y , z completamente equivalenti avremo :

$$\sum \frac{x^2}{r^5} = \sum \frac{y^2}{r^5} = \sum \frac{z^2}{r^5} . \quad (5.10)$$

Di conseguenza si ricava:

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \left[\frac{3x^2}{r^5} \mathbf{p} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \mathbf{p} \right] = 0 . \quad (5.11)$$

Possiamo pertanto concludere che per quelle sostanze per le quali $\mathbf{E}_i = 0$, il campo molecolare risulta dato dall'espressione:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (5.12)$$

che permette di collegare il campo elettrico locale che agisce su una molecola all'interno del dielettrico con il campo elettrico macroscopico. Tale espressione prende il nome di *relazione di Lorentz*.

Vogliamo osservare che l'espressione (5.12), come tutte le conseguenze, che da essa si possono dedurre, deve essere considerata come una prima approssimazione, dato che un dielettrico reale differisce dal modello usato per la sua deduzione. In particolare va tenuto presente che i campi elettrici delle molecole non sono campi di semplici dipoli, che il reticolo può non essere cubico, che i momenti delle varie molecole possono non essere identici, ecc.

5.2 La polarizzabilità e l'equazione di Clausius-Mossotti

Il momento di dipolo p_m associato ad una molecola che ha subito il fenomeno della polarizzazione è proporzionale al campo elettrico molecolare, la costante di proporzionalità essendo una quantità oc chiamata *polarizzabilità*; vale cioè la relazione:

$$p_m = \alpha E_m. \quad (5.13)$$

Se un determinato materiale è costituito da N molecole per unità di volume con polarizzabilità oc il vettore polarizzazione \mathbf{P} è allora uguale a:

$$\mathbf{P} = N p_m = \alpha N E_m. \quad (5.14)$$

Se sostituiamo nella (5.14) il valore di E_m dato dalla (5.12) e ricordiamo che $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$ otteniamo che :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)}. \quad (5.15)$$

Questa formula, nota come *relazione di Clausius-Mossotti*, fornisce la polarizzabilità di una molecola in funzione di quantità determinabili sperimentalmente ed è verificata molto bene nel caso dei gas a bassa densità, mentre è solo approssimativamente valida per liquidi e solidi. Nel caso di gas rarefatti, per i quali il campo elettrico molecolare coincide praticamente con il campo elettrico macroscopico e la costante dielettrica relativa è circa uguale ad uno, la relazione (5.15) assume la forma semplice:

$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{N} (\epsilon_r - 1). \quad (5.16)$$

$$(5.16)$$

5.3 Polarizzabilità delle molecole non polari

Abbiamo visto che gli atomi e le molecole non polari sono sistemi di cariche che presentano, in condizioni normali, un momento di dipolo elettrico nullo.

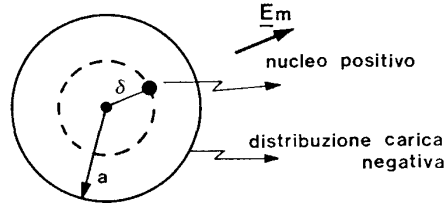


FIG. 5.3. - Semplice modello per il calcolo della polarizzabilità di molecole non polari.

L'applicazione di un campo elettrico esterno produce una deformazione della distribuzione delle cariche negative che distrugge l'iniziale simmetria esistente tra cariche positive e negative, che portava a far sì che i baricentri delle due distribuzioni coincidessero, e induce un momento di dipolo elettrico \mathbf{p}_m . Prendendo come esempio l'atomo di idrogeno e assumendo come modello per l'atomo quello del nucleo puntiforme circondato da una distribuzione uniforme ρ di carica negativa contenuta in una sfera di raggio a (modello derivante dalla meccanica quantistica ondulatoria), dimostreremo come è possibile ottenere il valore della polarizzazione per molecole non polari dotate di una struttura semplice. Per quanto detto precedentemente sappiamo che il campo elettrico responsabile della polarizzazione dell'atomo è il campo elettrico \mathbf{E}_m . Tale campo agisce sul nucleo positivo dell'atomo con una forza orientata nello stesso verso e sulla distribuzione di carica negativa con una forza diretta in verso opposto. Se immaginiamo che la sfera carica negativamente si sposti rigidamente senza subire deformazioni avremo che, per effetto del campo elettrico agente, la situazione di equilibrio sarà quella mostrata in Fig. 5.3 con i baricentri delle cariche positive e negative separate da una distanza δ . Questo fa sì che in tale nuova configurazione l'atomo di idrogeno presenti un momento di dipolo $\mathbf{p}_m = e\delta$. Per ricavare il valore della distanza δ tra i baricentri delle distribuzioni di cariche di segno opposto bisogna tener conto che sulle cariche agiscono due forze: la prima è quella dovuta al campo elettrico \mathbf{E}_m che tende a separare le cariche positive da quelle negative, la seconda è quella dovuta all'attrazione elettrostatica della forza di Coulomb che tende invece a riavvicinare le cariche, quindi a contrastare l'azione di \mathbf{E}_m . Per il teorema di Gauss sappiamo che la forza attrattiva esercitata sul nucleo dipende solo dalla carica negativa contenuta nella sfera di raggio δ che è uguale a :

$$q = \left(\frac{3e}{4\pi a^3} \right) \left(\frac{4}{3} \pi \delta^3 \right) = \frac{e\delta^3}{a^3}. \quad (5.17)$$

In condizioni di equilibrio si ha allora che:

$$eE_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qe}{\delta^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{a^3}. \quad (5.18)$$

Da questa relazione si ricava facilmente:

$$\mathbf{p}_m = e\delta = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_m \quad (5.19)$$

e ricordando poi che $\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m$ si trova che la polarizzabilità è :

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3. \quad (5.20)$$

Il procedimento seguito per il calcolo di α per l'atomo di idrogeno può essere facilmente esteso a un atomo con Z elettroni ; basterà tener presente che la carica totale della distribuzione sferica di cariche negative è $-Ze$ e che la carica del nucleo è $+Ze$. Anche la polarizzabilità di una molecola biatomica può essere ottenuta con questo stesso metodo calcolando separatamente la polarizzabilità degli atomi che la compongono e sommando poi i valori ottenuti.

Sostituendo la (5.20) nella espressione (5.15) è possibile eliminare la polarizzabilità α ed ottenere la relazione:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 N = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (5.21)$$

nella quale il termine a sinistra rappresenta il volume realmente occupato dalle molecole contenute nell'unità di volume. Se confrontiamo questo valore con quello determinato per via sperimentale mediante la misura di altre grandezze fisiche è possibile avere una idea della bontà del modello descritto. Inoltre si può confrontare il valore del raggio dell'atomo dato dalla (5.21) con quello ottenuto sperimentalmente. Per esempio per l'Argon la costante dielettrica relativa, a pressione atmosferica e a 20 °C, vale 1,000545. Se nella (5.21) sostituiamo questo valore a ϵ_r ed a N il numero di atomi per unità di volume, a 760 mm Hg e a 20 °C, otteniamo per il raggio dell'atomo un valore dell'ordine di un angstrom, cioè di circa 10^{-10} metri, che è in buon accordo con quanto si ricava con differenti metodi sperimentali. Vogliamo infine osservare che la trattazione da noi seguita si applica in pratica anche a sostanze le cui molecole posseggono un debole momento di dipolo permanente. Per esempio, nel caso di un dielettrico liquido, se il momento di dipolo proprio delle molecole costituenti è $p_0 \leq 0,15 \cdot 10^{-29}$ coul·m, la polarizzazione per deformazione ha un ruolo predominante e gli effetti legati alla polarizzazione permanente delle molecole possono essere praticamente trascurati. Se invece è $p_0 \geq 0,35 \cdot 10^{-29}$ C · m, sono allora gli effetti legati alla polarizzazione per deformazione che possono essere trascurati e il liquido deve essere considerato come un liquido polare.

5.4 Polarizzabilità delle molecole polari

Se la sostanza in esame è costituita da molecole polari, dotate cioè di momento di dipolo proprio (dell'ordine fra 10^{-28} e 10^{-29} C · m), il campo elettrico molecolare \mathbf{E}_m tende a orientare i dipoli parallelamente alla sua direzione. Tale

orientamento, dovuto all'azione di una coppia di forze con momento meccanico $\mathcal{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_m$, è in pratica solo parziale a causa dell'agitazione termica della molecola che tende a mantenere la direzione dei dipoli elettrici completamente casuale. Tuttavia il valore medio della componente del momento di dipolo nella direzione del campo \mathbf{E}_m è diversa da zero e questo fa sì che la sostanza presenti una polarizzazione non nulla e che il vettore macroscopico di polarizzazione \mathbf{P} , qualora il mezzo sia isotropo, risulti diretto parallelamente ad \mathbf{E}_m . In questo paragrafo vogliamo sviluppare un metodo per valutare il valore medio della componente del momento elettrico nella direzione di \mathbf{E}_m e quindi il valore della polarizzabilità nel caso di molecole polari. Tale metodo risulta valido per le sostanze gassose e per alcune sostanze liquide mentre in tutti gli altri casi va considerato con molta cautela potendo portare a risultati in completo contrasto con quelli forniti dall'esperienza.

Un dipolo con momento elettrico \mathbf{p}_0 orientato parallelamente al campo elettrico \mathbf{E}_m , su di esso agente, possiede una energia potenziale minore rispetto a quella di un dipolo che formi un angolo ϑ con la direzione del campo. Infatti tale energia potenziale è, come sappiamo, data da:

$$W = -p_0 E \cos \vartheta.$$

Ricordiamo che se avessimo a che fare con un gas di N molecole per unità di volume dotate di sola energia cinetica $W_K = 1/2 mu^2$ in equilibrio termico alla temperatura T , la ripartizione delle velocità delle molecole risulterebbe data dalla legge di Maxwell:

$$dN = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mu^2}{KT}} u^2 du dv \quad (dv = dx dy dz)$$

che fornisce il numero dN di molecole contenute in media nel volume dv e aventi velocità comprese tra u e $u + du$ (K denota la costante di Boltzmann).

Introducendo la quantità di moto $q = mu$, la formula precedente può scriversi :

$$dN = AN e^{-\frac{W_K}{KT}} q^2 dq dv \quad (5.23)$$

dove con A abbiamo indicato una costante di proporzionalità da determinarsi con la condizione:

$$\int dN = AN \int_V dv \int_0^\infty e^{-\frac{W_K}{KT}} q^2 dq = N_V$$

che fornisce il numero totale N_V di molecole contenute nel volume V .

Orbene la (5.23) ha validità generale cioè vale anche quando sulle molecole agiscono forze esterne; in altri termini sostituendo a W_K l'energia totale W_T (cinetica + potenziale) essa fornisce il numero di molecole contenute nel volume dv con energia compresa fra W_T e $W_T + dW_T$.

In questa accezione generale la (5.23) è denominata *formula di distribuzione dell'energia di Boltzmann*.

Nel caso che stiamo trattando di un sistema di molecole dotate di momento di dipolo elettrico p_0 la (5.23) si scrive:

$$dN = \frac{N_V e^{-\left(\frac{q^2}{2m} - p_0 E_m \cos \vartheta\right)/KT} q^2 dq dv}{\int_V dv \int_0^\infty e^{-\left(\frac{q^2}{2m} - p_0 E_m \cos \vartheta\right)/KT} q^2 dq}.$$

Il numero di molecole contenute nel volume dv aventi una energia potenziale $- p_0 E_m \cos \vartheta$ indipendentemente dalla loro velocità, si otterrà integrando dN rispetto alla quantità di moto q . Esso risulta pertanto dato da:

$$dN^* = N_V C_0 e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} dv$$

con

$$C_0 = \frac{1}{\int_V e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} dv}.$$

Poiché in coordinate polari $dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi$ se integriamo dN^* rispetto alle variabili r e ϕ otteniamo la seguente espressione:

$$d\tilde{N} = \frac{N_V e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} d\Omega}{\int e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} d\Omega} \quad (5.24)$$

essendo $d\Omega$ l'elemento di angolo solido : $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Il valore medio della componente del momento di dipolo nella direzione di E_m , valore che indicheremo con $p_0 \cos \vartheta$, potrà essere calcolato moltiplicando l'espressione (5.24) per $p_0 \cos \vartheta$, integrando su tutto l'angolo solido, e dividendo poi per il numero totale di molecole contenute nell'unità di volume; avremo così:

$$\overline{p_0 \cos \vartheta} = \frac{\int e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} p_0 \cos \vartheta d\Omega}{\int e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} d\Omega}$$

o anche esplicitando l'elemento di angolo solido $d\Omega$:

$$\overline{p_0 \cos \vartheta} = \frac{\int_0^\pi e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} p_0 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi e^{p_0 E_m \cos \vartheta / KT} \sin \vartheta d\vartheta}. \quad (5.25)$$

Ponendo in questa espressione $\frac{p_0 E_m}{KT} = y$, $\cos \vartheta = x$ abbiamo:

$$\overline{p_0 \cos \vartheta} = \frac{p_0 \int_{-1}^1 e^{yx} x dx}{\int_{-1}^1 e^{yx} dx} . \quad (5.26)$$

Gli integrali della (5.26) sono facilmente calcolabili e in definitiva si ottiene l'espressione :

$$\overline{p_0 \cos \vartheta} = p_0 \left[\frac{e^{-y} + e^y}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \right] = p_0 \left(\coth y - \frac{1}{y} \right) \quad (5.27)$$

che prende il nome di *formula di Langevin*. Come è possibile vedere anche nel grafico di Fig. 5.4, tale funzione presenta un andamento lineare per piccoli valori di y , mentre al crescere di y tende ad un valore di saturazione.

Per piccoli valori di y è possibile utilizzare il seguente sviluppo in serie di potenze :

$$\coth y = \frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{y^3}{45} \dots \quad (5.28)$$

Arrestando tale sviluppo al secondo termine e sostituendo nella (5.27) otteniamo che:

$$\overline{p_0 \cos \vartheta} = \frac{p_0^2 E_m}{3KT} . \quad (5.29)$$

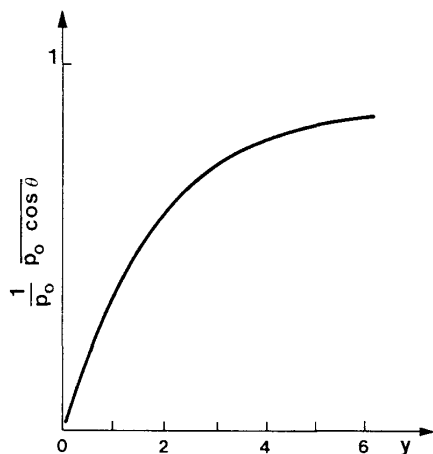


FIG. 5.4 - Funzione di Langevin.

Per meglio comprendere i limiti di tale approssimazione basti considerare che per la molecola di HC1, dotata di un momento di dipolo di $3,43 \cdot 10^{-30}$ coulomb · metro, ad una temperatura di 300 °K, anche con un campo elettrico dell'ordine di 10^8 V/metro si ha che $y \sim 0,1$. È evidente quindi come, per temperature non troppo basse, anche con campi elettrici molto intensi la condizione $y \ll 1$ sia sufficientemente verificata.

In questa approssimazione si trova così che la polarizzabilità è:

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3KT} \quad (5.30)$$

e che il vettore polarizzazione elettrica è:

$$\mathbf{P} = \frac{N p_0^2}{3KT} \mathbf{E}_m \quad (5.31)$$

Nel caso di sostanze gassose rarefatte formate da molecole polari possiamo scrivere, utilizzando la (5.16) e tenendo conto sia dell'effetto di deformazione sia di quello di orientamento, che vale la relazione:

$$\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) = N \left(4\pi\epsilon_0 a^3 + \frac{p_0^2}{3KT} \right) \quad (5.32)$$

nota come *formula di Langevin-Debye*. Questa espressione mostra come i contributi dei due diversi tipi di polarizzazione possano essere messi in evidenza sperimentalmente in maniera separata per la differente dipendenza che i due termini della (5.32) presentano dalla temperatura.

5.5 Polarizzabilità di molecole anisotrope

Le molecole generalmente presentano geometrie piuttosto complicate e poco simmetriche. Può accadere allora che il momento di dipolo indotto dalla presenza di un campo elettrico vari al variare della direzione del campo elettrico e che non sia orientato parallelamente al campo. È questo il caso delle sostanze anisotrope. Prendiamo in esame per esempio la molecola di anidride carbonica CO₂ che presenta la forma allungata mostrata in Fig. 4.10 c).

È abbastanza intuitivo aspettarsi che, proprio a causa di tale geometria, la polarizzazione che la molecola subisce quando si applica un campo elettrico parallelo al suo asse (per asse di questa molecola intendiamo la direzione passante per i centri dei tre atomi) sia diversa dalla polarizzazione che si produce nel caso in cui il campo elettrico applicato, di uguale intensità, sia invece perpendicolare all'asse. In effetti la polarizzabilità della molecola per un campo \mathbf{E} parallelo all'asse è circa la metà di quella prodotta da un campo \mathbf{E} perpendicolare.

Se scegliamo una terna di assi cartesiani con l'asse z parallelo all'asse della molecola, come mostrato in Fig. 5.5, chiamiamo con α_x , α_y ed α_z la polarizzabilità

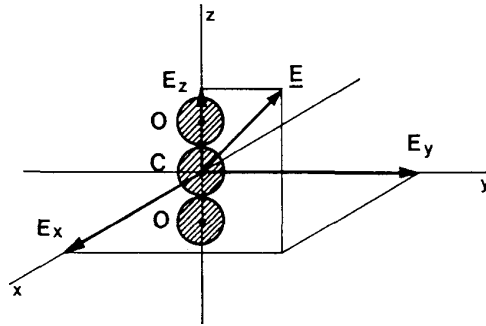


FIG. 5.5 - Esempio di molecola con polarizzabilità anisotropa.

che la molecola presenterebbe se il campo elettrico fosse parallelo rispettivamente all'asse x , y o z e applichiamo alla molecola un campo elettrico con una direzione qualsiasi, abbiamo che le componenti del dipolo indotto sono:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_x E_x \\ p_y &= \alpha_y E_y, \\ p_z &= \alpha_z E_z \end{aligned} \quad (5.33)$$

Poiché in particolare per la molecola di CO_2 è $\alpha_z \neq \alpha_x$ ed $\alpha_x = \alpha_y$, risulta che il momento di dipolo indotto non è parallelo al campo elettrico applicato \mathbf{E} . Se l'orientazione della terna di assi cartesiani viene poi scelta in maniera più generale di quanto è stato fatto nell'esempio precedente, al posto dei tre coefficienti α_x , α_y , ed α_z bisogna considerare un insieme di nove coefficienti. Il momento di dipolo in questo caso è dato da:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Si dice che l'insieme dei coefficienti α_{ij} costituisce un *tensore*. Il valore dei coefficienti dipende dalla scelta particolare degli assi cartesiani; per la disposizione mostrata in Fig. 5.5 la matrice dell'equazione (5.34) avrebbe diversi da zero solo i termini della diagonale principale per i quali varrebbero le relazioni $\alpha_{xx} = \alpha_x$, $\alpha_{yy} = \alpha_y$ ed $\alpha_{zz} = \alpha_z$ dove α_x , α_y ed α_z sono i valori utilizzati nelle relazioni (5.33). Si può inoltre dimostrare che in generale valgono le relazioni $\alpha_{xy} = \alpha_{yz}$, $\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$ ed $\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$, cioè che solo sei dei nove coefficienti sono indipendenti, e che quindi la matrice della polarizzabilità è simmetrica.

6

Struttura atomica della materia

6.1 Atomo di Bohr

Le informazioni più preziose sulla struttura dell'atomo si sono tratte, è ben noto, soprattutto dalla spettroscopia e dalle esperienze di Rutherford e collaboratori sulla deviazione delle particelle α (che non sono altro che nuclei di atomi di elio, emessi spontaneamente da sostanze radioattive) nell'attraversare sottili lamine metalliche.

Fu proprio per spiegare i risultati di questi esperimenti che Rutherford attorno al 1906 fu condotto a concepire l'atomo come costituito da un nucleo centrale, nel quale è praticamente concentrata tutta la massa dell'atomo, circondato da un certo numero di elettroni negativi, in modo che la loro carica complessiva sia, nell'atomo neutro, uguale e contraria a quella positiva del nucleo. Per spiegare la circostanza che elettroni si trovano a una distanza relativamente grande dal nucleo, nonostante quest'ultimo li attragga elettrostaticamente, Rutherford ammise che gli elettroni fossero dotati di un moto di rivoluzione attorno al nucleo, in guisa da costituire una specie di piccolo sistema planetario. Questa ipotesi dà però luogo a una difficoltà: una carica elettrica accelerata deve infatti, in conseguenza delle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo, irraggiare delle onde elettromagnetiche ¹⁾; l'energia cinetica degli elettroni dovrebbe perciò continuamente diminuire (come conseguenza dell'irraggiamento di energia elettromagnetica) e le orbite divenire sempre più piccole, in modo che gli elettroni finirebbero per cadere sul nucleo.

¹⁾ Questo concetto sarà discusso nel Vol. 2.

Inoltre si avrebbe che la frequenza delle onde elettromagnetiche emesse da un elettrone nel corso del suo moto di rivoluzione dovrebbe essere eguale alla frequenza di rivoluzione.

Siccome, a mano a mano che gli elettroni irradiano energia, le loro velocità angolari mutano continuamente, verrebbe emesso uno *spettro continuo* (una sovrapposizione di tutte le frequenze) invece dello *spettro di righe* sperimentalmente osservato nell'analisi delle radiazioni emesse da tutti i gas allo stato atomico. Questa difficoltà fu superata nel 1913 da N. Bohr, il quale intuì che le leggi dell'elettromagnetismo e della meccanica, che regolano l'andamento dei fenomeni nel mondo macroscopico (*leggi della fisica classica*), sono *inadeguate* a spiegare i fenomeni del mondo atomico. In particolare Bohr, basandosi su alcune ipotesi di lavoro invero rivoluzionarie alla luce della fisica classica, riuscì a dare una spiegazione soddisfacente dell'atomo di idrogeno, che è l'elemento chimico più semplice esistente in natura. Va però osservato che la teoria dell'atomo di Bohr, pur con i perfezionamenti introdotti successivamente da altri autori, tra cui ricorderemo in primo luogo Sommerfeld, conteneva diverse incongruenze ed inesattezze per cui, nonostante i suoi notevoli successi, essa fu sempre considerata non tanto come l'espressione definitiva di una teoria fisica, ma piuttosto come una provvisoria e parziale codificazione delle correzioni da apportare alla fisica classica per renderla applicabile al mondo atomico. La fisica atomica uscì da una siffatta posizione di disagio solo in seguito ad un profondo mutamento delle sue basi concettuali, che ebbe luogo negli anni 1924-27 per opera di taluni fra i più grandi fisici della nostra epoca (Louis De Broglie, W. Heisenberg, E. Schrodinger, P. A. M. Dirac, W. Pauli e altri) e che portò a sostituire alla teoria di Bohr una costruzione logicamente soddisfacente (*teoria quantistica*) che negli anni che seguirono si sviluppò con sempre maggiore ampiezza e fu applicata con successo in tutti i campi della fisica atomica e nucleare. Vogliamo tuttavia far osservare come nell'ambito di questa teoria il modello atomico di Bohr abbia conservato una sua validità, nel senso che esso costituisce una buona approssimazione del modello di atomo fornito dalla più perfetta teoria quantistica moderna.

Data la semplicità del modello di Bohr noi l'utilizzeremo in questa sede per lo studio dell'atomo di idrogeno. Ciò consentirà di introdurre alcuni concetti (come quelli di livello energetico, di numeri quantici, ecc.) che si dimostreranno essenziali per la descrizione del fenomeno della conducibilità elettrica nei metalli, che costituirà l'oggetto di alcuni paragrafi del capitolo successivo.

Va in ogni modo sottolineato come per la descrizione di alcuni fenomeni il modello di Bohr costituisca una schematizzazione troppo drastica tanto da non render conto di essi nemmeno da un punto di vista qualitativo. Infatti, come già abbiamo osservato al paragrafo 4.4 a proposito del fenomeno della polarizzazione elettrica di un dielettrico, la teoria quantistica attuale dà dell'atomo un modello sensibilmente diverso da quello di Bohr e assimilabile piuttosto a un sistema costituito da un nucleo centrale positivo circondato da una specie di nuvola elettronica negativa la cui densità ci fornisce, punto per punto, la *probabilità* di trovare un elettrone in quel punto.

La trattazione dell'atomo di idrogeno secondo Bohr si basa sulla seguente

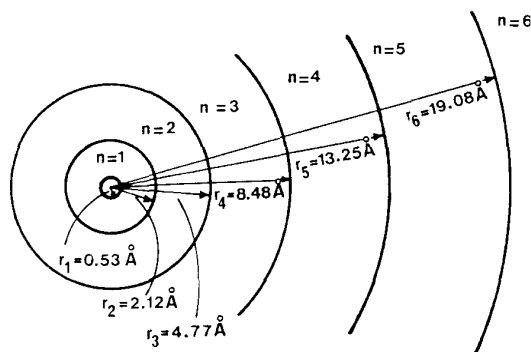


FIG. 6.1 - Raggi delle prime orbite permesse per l'elettrone secondo il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno.

ipotesi fondamentale: un elettrone in un atomo può muoversi su determinate orbite senza irraggiare, contrariamente a quanto consegue dalle leggi classiche. Le orbite possibili sono determinate dalla cosiddetta *regola di quantizzazione*, che enunceremo più avanti.

L'atomo di idrogeno è costituito, come sappiamo, da un nucleo di carica $+e$ e da un elettrone di carica $-e$, che si attraggono l'un l'altro con la forza di

Coulomb $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$ essendo r la distanza fra le due cariche; dal punto di vista

matematico il problema del moto dell'elettrone attorno al nucleo (quando se ne trascuri l'irraggiamento voluto dalle leggi classiche dell'elettromagnetismo) è esattamente equivalente a quello del moto di un pianeta attorno al Sole.

Come sappiamo, in generale, il pianeta descrive attorno al Sole un'ellisse, della quale questo occupa uno dei fuochi. Questa ellisse può in particolare degenerare in un cerchio. Come è noto dalla meccanica, tutte le orbite ellittiche che hanno lo stesso semiasse maggiore e differente eccentricità, hanno la stessa energia: fra queste orbite vi è quella, particolarmente semplice, circolare avente il raggio eguale al semiasse maggiore della famiglia di orbite ellittiche considerate.

Nel caso analogo del sistema elettrone-nucleo, che costituisce l'atomo di idrogeno, interessando soprattutto il calcolo dell'energia dell'elettrone che si muove su una delle orbite possibili, Bohr si limitò per ragioni di semplicità alla considerazione delle sole orbite circolari. Inoltre egli precisò la sua regola di quantizzazione, che come abbiamo detto individua le orbite elettroniche possibili, come segue: *i raggi r_n delle orbite fisicamente possibili sono determinati dalle condizioni che il modulo del momento della quantità di moto mur_n uguagli un multiplo intero di $h/2\pi$ (essendo $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ joule · secondo la costante di Planck):*

$$mur_n = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.1)$$

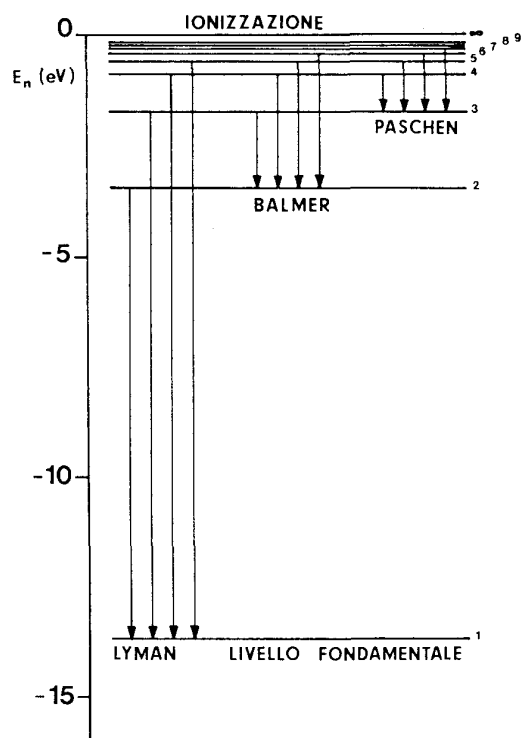


FIG. 6.2 - Livelli energetici permessi per l'elettrone secondo il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno. I livelli si infittiscono per n tendente all'infinito.

Osserviamo ora che quando l'elettrone si muove su un'orbita circolare di raggio r_n , la forza centripeta mu^2/r_n necessaria a trattenerlo su detta orbita è fornita dall'attrazione coulombiana, cioè:

$$\frac{mu^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2},$$

da cui

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \frac{e}{\sqrt{mr_n}}. \quad (6.2)$$

L'energia meccanica totale E sarà data dalla somma dell'energia cinetica

$\frac{1}{2}mu^2$ e di quella potenziale coulombiana $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$; in base alla formula

precedente si ha pertanto:

$$E = E_n = \frac{1}{2} mu^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2} m \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr_n} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} \quad (6.3)$$

che risulta negativa in accordo col fatto che l'atomo è un sistema in cui l'elettrone è *legato* al nucleo.

Ricavando r_n dalla condizione di Bohr:

$$r_n = n \frac{h}{2\pi} \frac{1}{mu} \quad (6.4)$$

e sostituendo per u il valore (6.2) si ha:

$$r_n = \epsilon_0 \frac{n^2 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a_0$$

dove $a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0,53 \text{ \AA}$ è il raggio dell'orbita più piccola permessa, che

corrisponde a $n = 1$. Nella Fig. 6.1 sono disegnate, in scala, le prime orbite dell'atomo di idrogeno secondo il modello di Bohr.

Dalla (6.3) è possibile ricavare l'espressione dell'energia E_n che compete alle varie orbite fisicamente possibili. Si ha:

$$E_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{R h c}{n^2} \quad (6.5)$$

ove si è posto

$$R = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} . \quad (6.5 \text{ bis})$$

Dando al numero n (detto *numero quantico totale*) i valori 1, 2, 3, ... , si ottengono i valori possibili dell'energia dell'elettrone dell'atomo di idrogeno che risultano quindi discreti e vengono denominati *livelli energetici*. Il loro schema è rappresentato in Fig. 6.2.

6.2 Spettro dell'atomo di idrogeno. - Livelli energetici e numeri quantici

La possibilità di una conferma sperimentale della teoria di Bohr si ha nel calcolo delle frequenze dello spettro di radiazioni emesso dall'atomo di idrogeno spettro che era già noto, all'epoca di Bohr, dalle misure sperimentali. Tale spettro è costituito di righe situate parte nella regione visibile ¹⁾, parte nella infrarossa e parte nell'ultravioletto; rappresentandole tutte con un unico schema (prendendo per ascisse le frequenze) si avrebbe una distribuzione del tipo di quella di Fig. 6.3. Questo spettro è stato il primo di cui si sia scoperta

¹⁾ La regione visibile dello spettro è quella relativa alla lunghezza d'onda tra 7.800 Å a 4.000 Å, la regione dell'infrarosso è quella compresa tra 1000 μ e 0,78 μ, la regione dell'ultravioletto è quella compresa tra 4000 Å e 136 Å.

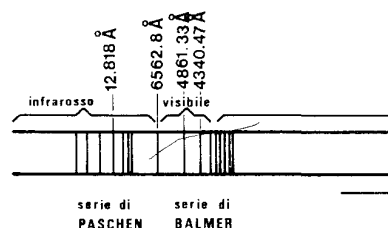


FIG. 6.3 - Spettro a righe dell'atomo di idrogeno.

empiricamente una legge semplice della distribuzione delle righe; le frequenze

(o i cosiddetti numeri d'onda $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$ essendo c la velocità della luce nel vuoto e λ la lunghezza d'onda) di queste si possono ottenere tutte dalla formula:

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

dove $R_H = 1,09678 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ è la costante di Rydberg ed n, n' sono due interi arbitrari (con $n > n' > 0$). Le righe di questo spettro si raggruppano in serie (riconoscibili anche nello schema) ciascuna corrispondente ad un valore fissato di n' ; praticamente se ne osservano quattro:

$n' = 1, n = 2, 3, 4, \dots$ serie di Lyman (ultravioletta);
 $n' = 2, n = 3, 4, 5, \dots$ serie di Balmer (visibile);
 $n' = 3, n = 4, 5, 6, \dots$ serie di Paschen (infrarossa);
 $n' = 4, n = 5, 6, 7, \dots$ serie di Brackett (infrarossa).

Come si vede dalla (6.6), in ciascuna serie, col crescere indefinito di n la $\tilde{\nu}$ tende al limite R_H/n'^2 , vale a dire le righe di una serie si addensano verso una posizione limite, corrispondente a $\tilde{\nu} = R_H$ per la serie di Lyman, $\tilde{\nu} = R_H/4$ per la serie di Balmer, ecc.; esse anzi in vicinanza del limite diventano così fitte che non è più possibile distinguerle fra loro per quanto risolutivo sia lo spettroscopio usato (della serie di Balmer se ne sono potute osservare una trentina: delle altre assai meno, per varie ragioni). La formula scoperta per il caso $n' = 2$ da Balmer nel 1885, è verificata con una precisione che raramente è raggiunta in altri campi della fisica.

Si noti che è stata proprio l'estrema semplicità della formula (6.6) a suggerire a Bohr il suo modello di atomo.

Per ricavare lo spettro dell'atomo di idrogeno dalla conoscenza della formula (6.5), che dà l'insieme dei livelli energetici, Bohr introdusse una seconda ipotesi e precisamente:

l'irraggiamento di radiazioni da parte dell'atomo è prodotto dalla transizione dell'elettrone da un'orbita più esterna (a cui compete un'energia E_n) a una

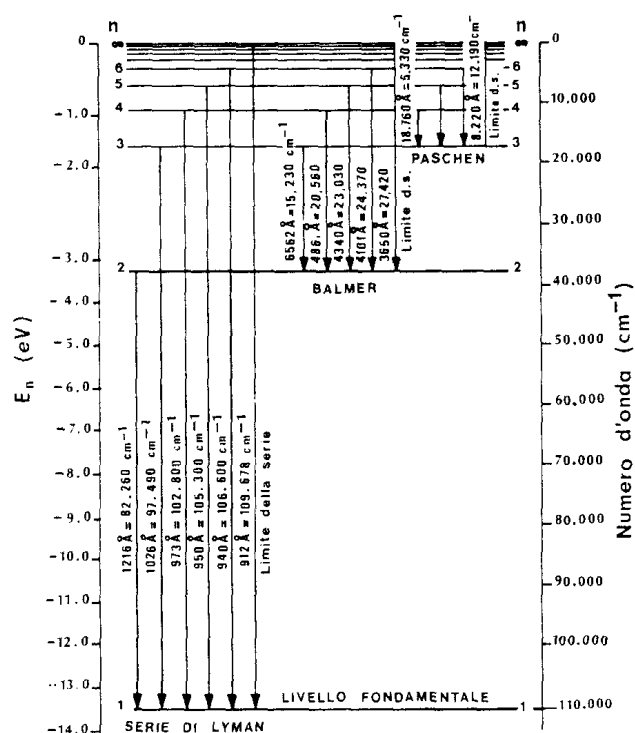


FIG. 6.4 - Le serie di righe dello spettro dell'atomo di idrogeno sono dovute alle transizioni dell'elettrone da un livello ad energia maggiore ad un livello ad energia inferiore. Risulta evidente l'esistenza di un limite per ciascuna serie.

più interna (a cui compete un'energia minore $E_{n'}$). La frequenza ν della radiazione che accompagna la transizione dell'elettrone è data dalla relazione:

$$\nu = \frac{E_n - E_{n'}}{h}.$$

Ciò equivale ad ammettere che la diminuzione di energia che si ha in una transizione da un'orbita ad un'altra è concentrata in un solo *quanto di energia* $h\nu$.

Se, in base a questa ipotesi, si calcolano le frequenze emesse o i cosiddetti numeri d'onda $\tilde{\nu}$ si ottiene:

$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

in ottimo accordo con i risultati sperimentali.

Si nota infatti che il valore teorico della costante (6.5 bis), risultante dal calcolo teorico, coincide con buona approssimazione con la costante di Rydberg che compare nella formula empirica (6.6).

Nella Fig. 6.4 è mostrato come, dal diagramma dei livelli energetici, sia possibile

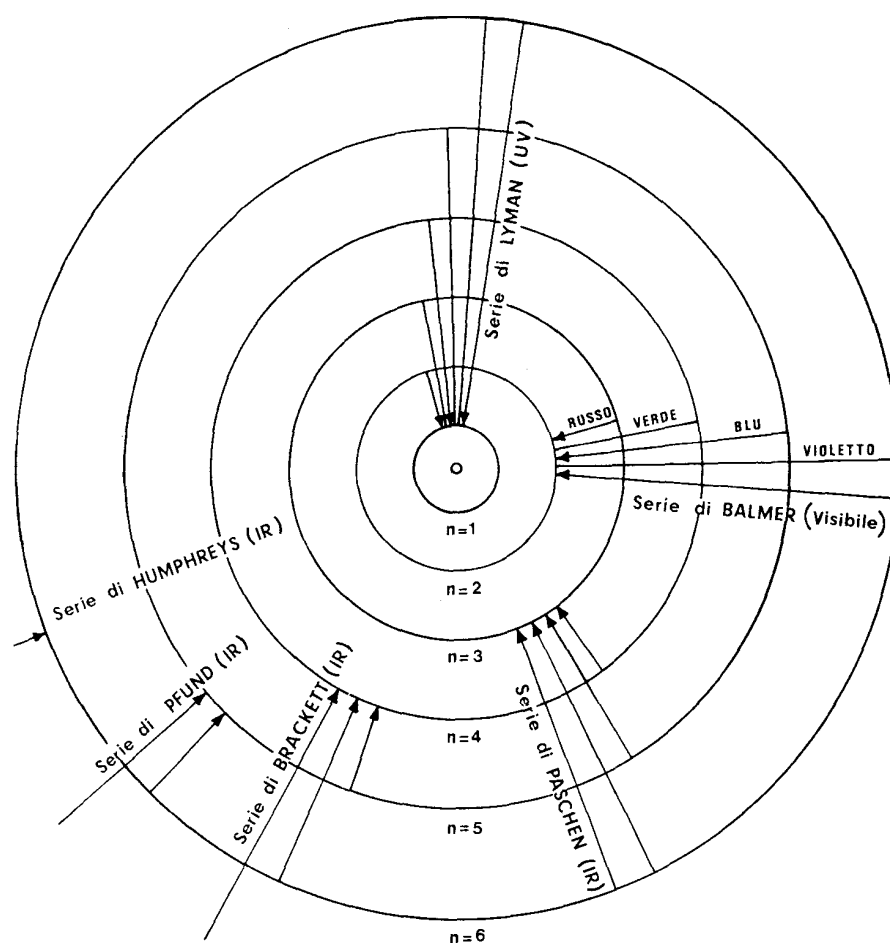


FIG. 6.5 - Rappresentazione delle serie di righe dello spettro dell'atomo di idrogeno in relazione delle transizioni degli elettroni da orbite esterne ad orbite interne.

ricavare le varie serie dello spettro osservato. Nella Fig. 6.5 è illustrata una analoga applicazione in termini di orbite elettroniche.

Vogliamo ora osservare come il modello atomico di Bohr può essere generalizzato, senza eccessive difficoltà, anche al caso in cui l'atomo sia sottoposto a un campo di forze (eletttriche e magnetiche) esterne. In questo caso il campo totale delle forze agenti sull'elettrone è privo di particolari caratteri di simmetria. Come conseguenza di ciò si trova che i livelli energetici dell'atomo (e le orbite del suo elettrone) risultano caratterizzati da *tre* numeri quantici, cioè quanti sono i gradi di libertà dell'elettrone.

Si avrebbe precisamente $E=E_{nlm}$, dove n è il *numero quantico totale* e assume i valori 1, 2, 3, ... ; l è il *numero quantico azimutale* e assume i valori

0, 1, 2, ..., $n-1$; m è il *numero quantico magnetico* e assume i valori $-l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$.

L'esperienza ha inoltre dimostrato che l'elettrone ha anche un *grado di libertà interno* come se esso fosse costituito da una sferula capace di rotare attorno a un proprio asse con un momento della quantità di moto S la cui proiezione nella direzione dell'asse è *quantizzata*, potendo assumere solo i valori

$$s \frac{h}{2\pi} \left(\text{con } s = \pm \frac{1}{2} \right) ; s \text{ è chiamato numero quantico di spin.}$$

Possiamo quindi concludere che lo stato dell'elettrone dell'atomo in un campo di forze qualsiasi è caratterizzato da quattro numeri quantici: n, l, m, s .

I livelli energetici semplici dipendono dai predetti numeri quantici; per particolari strutture simmetriche l'energia può dipendere solo da alcuni di essi, per es. soltanto da n (come nel caso dell'atomo di idrogeno non sottoposto a forze esterne): si dice allora che i livelli sono *degeneri* e ciascuno di essi è costituito dalla sovrapposizione di un certo numero di livelli semplici.

Nello stato di minima energia l'elettrone occupa il livello energetico più basso (o fondamentale), e risulta allora nello stato maggiormente legato al nucleo, a cui corrisponde l'energia potenziale minore.

Nel caso dell'atomo di idrogeno non soggetto a forze esterne l'energia potenziale dell'elettrone in funzione della distanza r dal nucleo è rappresentata in Fig. 6.6.

Se dall'esterno viene fornita energia all'elettrone mediante un processo di radiazione o collisione, esso può portarsi dal livello iniziale a uno superiore. Se l'energia assorbita dall'elettrone è superiore a quella necessaria per portarlo all'ultimo livello legato (cioè avente energia negativa), l'attrazione elettrostatica del nucleo è vinta dall'energia cinetica per cui esso risulta *libero*, cioè non più legato al nucleo. In altri termini l'atomo *perde* l'elettrone, risultando così *ionizzato*: l'energia spesa per ionizzare l'atomo prende il nome di *energia di ionizzazione* (vedi Fig. 6.2).

Osserviamo ancora che nel modello di Bohr la quaterna dei numeri quantici n, l, m, s che caratterizza lo stato dinamico dell'elettrone è suscettibile pure di

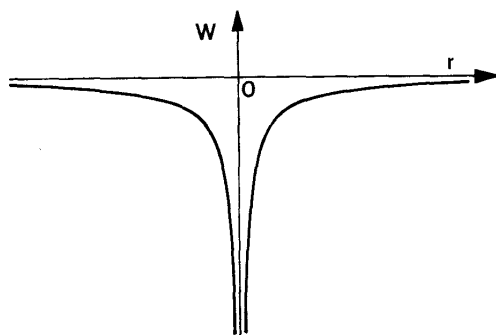


FIG. 6.6 - Andamento dell'energia potenziale di un elettrone in funzione della distanza r dal nucleo, situato nel punto $r = 0$.

una interpretazione geometrica intuitiva anche se non esatta. Tali numeri caratterizzano infatti anche *l'orbita*, percorsa dall'elettrone. Precisamente nell'atomo di idrogeno, non soggetto a forze esterne, tali orbite sono delle ellissi: da n dipende il semiasse maggiore, da l l'eccentricità, da m la giacitura e da s l'orientamento dello spin rispetto alla normale al piano dell'orbita.

6.3 Atomi a più elettroni. - Il principio di esclusione di Pauli

Il modello di Bohr è stato esteso alla trattazione di atomi di un numero qualsiasi di elettroni.

Ricordiamo che un atomo generico è costituito da un nucleo la cui carica positiva $+Ze$ è data dalla presenza in esso di Z protoni tenuti legati da un certo numero N di neutroni. Si suol individuare un nucleo mediante il suo numero atomico Z e il numero A delle particelle (neutroni o protoni, chiamati genericamente nucleoni) che compongono il nucleo stesso. Evidentemente sarà $A = Z + N$. Se l'atomo è neutro (cioè non ionizzato) la carica del nucleo risulterà compensata da Z elettroni negativi che ruotano attorno al nucleo stesso. Il calcolo dello stato dinamico (in particolare delle orbite e dell'energia) posseduto da ciascun elettrone può essere fatto applicando regole che sono la generalizzazione di quelle di quantizzazione di Bohr. Naturalmente il problema è complicato dal fatto che ogni singolo elettrone, anche in assenza di forze esterne, si muove nel campo di forze generato dal nucleo e da tutti gli altri elettroni.

Si può comunque dimostrare che lo stato dinamico di ogni singolo elettrone e ogni suo livello energetico (semplice) risulta caratterizzato ancora da una quaterna di numeri quantici n_i, l_i, m_i, s_i .

Ammettendo che in condizioni normali il sistema si dispone nello stato di minima energia sarebbe da attendersi che tutti gli elettroni si dispongano sul livello fondamentale ($n_i = 1, l_i = 0, m_i = 0, s_i = \uparrow$). Se ciò avvenisse le proprietà degli elementi chimici, che differiscono l'uno dall'altro unicamente per il numero Z di elettroni, dovrebbero variare lentamente e con continuità al crescere di Z , vale a dire percorrendo l'intera tabella di Mendelejeff. Ciò è in evidente contrasto con l'esperienza che mostra in modo inoppugnabile l'esistenza in tale tabella di *periodi* ben definiti. La spiegazione di questo fatto è stata data nel 1925 da Pauli attraverso l'assunzione di un nuovo principio fondamentale della fisica atomica, noto sotto il nome di *principio di Pauli* o *principio di esclusione*. Esso afferma che *in ogni atomo non possono esistere due elettroni in stati caratterizzati dalla stessa quaterna di numeri quantici*. In altri termini il principio afferma che in un atomo in ciascuna orbita può muoversi un solo elettrone. Dato che ogni gruppo di stati che hanno lo stesso valore di n hanno all'incirca la stessa energia, gli elettroni in un atomo si raggruppano fra di loro in vari *strati* attorno al nucleo; considerando atomi di numero atomico via via crescente, gli elettroni riempiono dapprima lo strato più interno ($n = 1$), detto strato K , fino al suo numero massimo (che si trova essere 2), poi il secondo strato ($n = 2$), detto strato L , fino al suo numero massimo che risulta essere uguale a 8; successivamente il terzo strato ($n = 3$), detto strato M , cui corrisponde un massimo di 18 elettroni e via di seguito.

6.4 Struttura elettronica dei solidi. - Formazione delle bande

La struttura a strati illustrata nel paragrafo precedente, è valida solo per atomi isolati, come è il caso di un gas atomico. Se gli atomi sono abbastanza vicini in modo da poter essere considerati legati, come in un solido, i livelli di ciascun atomo sono perturbati dalla presenza degli altri atomi.

L'interazione tra gli atomi porta allora alla formazione delle cosiddette bande di livelli energetici. Se due sistemi fisici, in questo caso due atomi, sono connessi in modo che vi possano essere scambi di energia, sono detti accoppiati. L'accoppiamento è debole se solo una piccola frazione dell'energia totale viene scambiata; è stretto quando la frazione dell'energia accoppiata è abbastanza grande. Quando gli atomi sono lontani l'energia tra loro scambiata è trascurabile, e i livelli energetici dei loro elettroni sono quelli imperturbati.

Supponiamo di comprimere un gas di atomi isolati: al diminuire delle distanze interatomiche si arriva ad una condizione per cui le orbite più esterne degli elettroni dei singoli atomi si sovrappongono. Comprimendo ulteriormente, anche le orbite interne si sovrappongono e si potrebbe giungere alla sovrapposizione totale di tutte le orbite. Nei solidi questa sovrapposizione totale non è raggiunta ma ve ne è una sufficiente da dover considerare l'accoppiamento tra gli elettroni esterni degli atomi vicini. Il risultato di questo accoppiamento è che livelli, originariamente identici quando gli atomi cui appartengono sono distanti, assumono valori dell'energia che differiscono tra loro lievemente quando avviene una parziale sovrapposizione.

Descriviamo ora per esempio il processo di accoppiamento di due atomi di idrogeno. Consideriamo in particolare il caso in cui due orbite di Bohr vengono sovrapposte parzialmente, come in Fig. 6.7. Quando le due orbite si sovrappongono, si verifica che su un elettrone non agisce più soltanto la forza elettrostatica attrattiva del nucleo di appartenenza, ma interviene anche la forza attrattiva del secondo nucleo e la forza repulsiva dovuta all'altro elettrone. Il moto dell'elettrone viene pertanto perturbato. Il risultato è che ad ogni istante i due elettroni si trovano ad energie lievemente diverse e non è possibile stabilire quale dei due sia ad energia maggiore. Vi è quindi uno spostamento dei livelli energetici corrispondenti ad orbite sovrapposte.

Consideriamo ora N atomi lontani tra di loro e avviciniamoli simultaneamente per formare un solido. Inizialmente si può pensare che i livelli di tutto

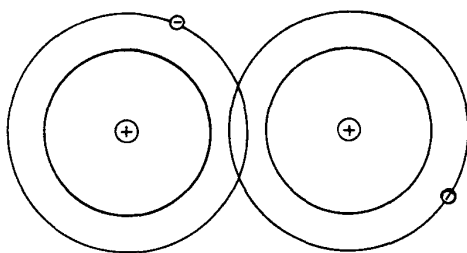


FIG. 6.7 - Atomi di idrogeno con orbite elettroniche sovrapposte.

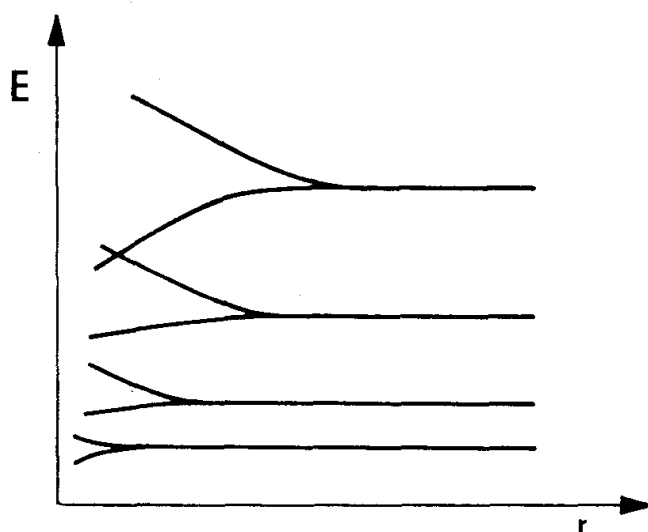


FIG. 6.8 - Separazione dei livelli di energia di un sistema di due atomi uguali in funzione della loro distanza interatomica r .

il sistema siano gli stessi del singolo atomo isolato, e che però ogni livello sia la sovrapposizione di N livelli uguali. Avvicinando gli atomi, questi N livelli cominciano a separarsi in energia. Nella Fig. 8.6 è mostrato il sistema di livelli in funzione della distanza interatomica per il caso $N = 2$.

Sulla destra di un diagramma del tipo di quello di Fig. 6.8, gli atomi sono distanti, e ogni livello rappresenta N livelli sovrapposti. Diminuendo le distanze interatomiche, ogni singolo livello si separa in N livelli, ciascuno ad una energia lievemente diversa da quella del livello vicino. La separazione, al diminuire di r , avviene prima per i livelli delle orbite più esterne, poi per quelli delle orbite più interne. I gruppi di livelli che vengono così a formarsi, prendono il nome di *bande*.

Ogni solido ad una certa pressione e temperatura è caratterizzato da una distanza interatomica r_0 ben determinata, cui corrisponde una certa configurazione di bande.

Di solito per una descrizione sommaria della struttura delle bande di una certa sostanza si usano grafici del tipo di quelli mostrati in Fig. 6.9 dove l'ascissa rappresenta la distanza in una qualunque direzione all'interno del solido e l'ordinata l'energia dei livelli.

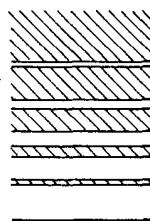


FIG. 6.9 - Diagramma tipico delle bande di livelli di un solido.

I livelli che per r molto grande erano vuoti, danno luogo a bande vuote, (zone bianche della figura) quelli che per r molto grande erano occupati danno luogo a bande occupate (zone tratteggiate della figura). Se, diminuendo r , due bande, una piena ed una vuota, si sovrappongono, ha origine una banda semipiena.

Le bande che interessano le proprietà elettriche dei solidi sono le cosiddette bande di *valenza* e di *conduzione*. Si definisce banda di *valenza* la banda occupata di energia maggiore, che deriva dal livello elettronico occupato ad energia maggiore dell'atomo. Gli elettroni che si trovano in questa banda sono gli elettroni di valenza degli atomi che compongono il solido. La banda di *conduzione* è la banda di livelli immediatamente al di sopra della banda di valenza e il suo nome deriva dalla importanza che essa riveste nei processi di conduzione elettrica nei solidi.

Abbiamo visto che, secondo il modello atomico di Bohr, un elettrone in un atomo può assumere solo definiti valori dell'energia, cioè sistemarsi su determinate orbite. Qualsiasi altro valore dell'energia è proibito. Quando i livelli si allargano in bande, si possono formare due diverse configurazioni: le bande possono allargarsi fino a sovrapporsi, oppure può restare un intervallo tra di esse detto *intervallo proibito*. Tale intervallo è privo di livelli permessi e quindi rappresenta un insieme di valori dell'energia proibiti per gli elettroni del solido in questione.

6.5 Moto degli elettroni in un solido

In un solido i nuclei non sono liberi di muoversi ma occupano posizioni di equilibrio disponendosi secondo differenti strutture geometriche. L'insieme di tutti i punti rappresentanti nello spazio le posizioni di equilibrio degli ioni prende il nome di *reticolo cristallino*. A causa della agitazione termica gli ioni oscillano intorno a queste posizioni di equilibrio con ampiezza di oscillazioni tanto maggiore quanto più alta è la temperatura del solido.

I metalli hanno una struttura cristallina che generalmente è costituita da un aggregato di un grandissimo numero di cristallini uniti gli uni agli altri in modo più o meno regolare. Sono poche le sostanze che non posseggono una struttura cristallina e che hanno cioè atomi disposti senza alcuna regolarità. Tali sostanze vengono chiamate *amorfe*.

Perché in un solido vi sia movimento di elettroni è necessario che questi possano spostarsi da un atomo all'altro del solido stesso. I soli elettroni che possono partecipare a tale movimento sono quelli detti *di valenza* cioè quelli che occupano lo strato più esterno e sono legati agli atomi molto debolmente.

Se un elettrone riceve una quantità sufficiente di energia (per esempio energia termica) e se la sua orbita si sovrappone ad un'orbita simile vuota di un altro atomo, l'elettrone può trasferirsi e muoversi su questa nuova orbita.

Esso può quindi spostarsi di atomo in atomo all'interno di un solido. È importante notare che affinché questo si verifichi è necessario soddisfare due condizioni: sovrapposizione di orbite simili, cioè esistenza di bande, e disponibilità di un livello vuoto entro le bande.

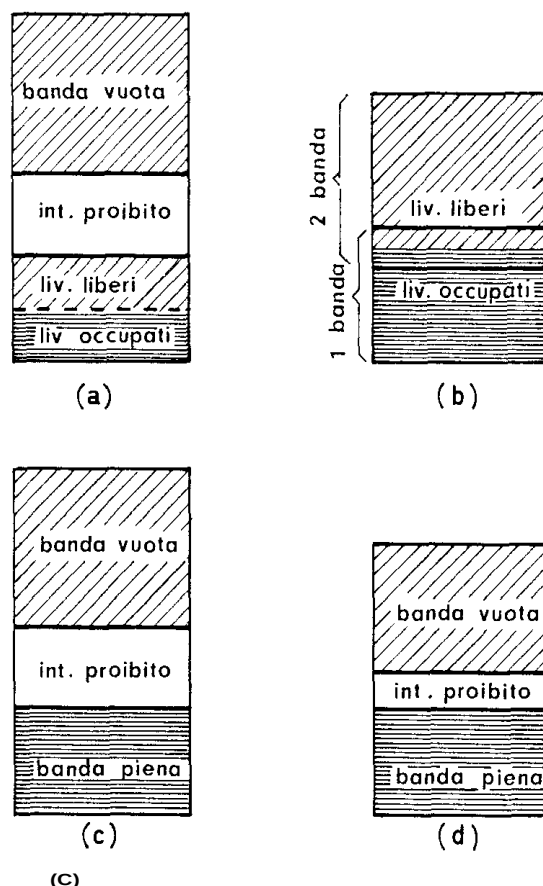


FIG. 6.10-Bande di livelli:
 a) e b) di un materiale conduttore
 c) di un materiale isolante.
 d) di un materiale semiconduttore.

Se applichiamo un campo elettrico al solido, l'elettrone di valenza, verificandosi sempre le condizioni precedenti, potrà trasferirsi ancora da un atomo all'altro muovendosi su livelli di energia molto simili. Mentre nel caso dell'energia termica, però, si produceva un moto casuale, nel caso del campo elettrico si produce un moto ordinato nella direzione del campo. Il moto di un elettrone in un solido consiste quindi nel passaggio da un livello atomico di un atomo ad un livello atomico simile di un altro atomo. Questo è equivalente al moto di un elettrone da un livello ad un altro della stessa banda. Una banda vuota di elettroni non interessa ovviamente la conduzione. Una banda piena, i cui livelli cioè siano tutti occupati, non contribuisce ugualmente alla conduzione perché gli elettroni non hanno la possibilità di passare da un atomo all'altro essendo tutti i livelli simili già occupati.

Un caso in cui il movimento degli elettroni è permesso si verifica quando la banda di energia superiore non è completamente piena (Fig. 6.10 (a)) o quando l'ultima banda occupata è completa e quella immediatamente successiva non è separata da un intervallo proibito ma anzi si sovrappone alla precedente (Fig. 6.10(b)).

In quest'ultimo caso, in cui due bande si sovrappongono, alcuni degli elettroni che normalmente si sarebbero posti nella parte più alta della banda inferiore trovano degli strati di energia più bassa nella parte inferiore della banda superiore. In questo modo le bande risultano non completamente riempite ed è possibile il moto degli elettroni all'interno del solido.

I materiali caratterizzati dalle due strutture di bande ora descritte sono i *conduttori*. Un esempio del primo tipo è il *litio* in cui la prima banda è completa e la seconda occupata a metà. Un esempio del secondo tipo è il *berillio* che ha le prime due bande complete, e la terza vuota che si sovrappone alla seconda.

Nel caso che la banda di valenza, cioè la banda di energia superiore occupata, sia completa e che la banda successiva vuota sia separata da un intervallo proibito sufficientemente grande, la forza elettrica normale non riesce a spostare gli elettroni dall'una all'altra e non si ha quindi moto di elettroni. Sostanze che presentano questa struttura di bande sono gli *isolanti* (Fig. 6.10 (c)). È possibile però che l'intervallo proibito di energia sia molto piccolo. Quando l'intervallo proibito è sufficientemente piccolo l'energia termica è in grado di eccitare alcuni elettroni facendoli passare dalla parte superiore della banda piena a quella inferiore della banda vuota. La prima non è allora più piena e la seconda non è più vuota e quindi si ha la possibilità di un moto degli elettroni. Poiché gli elettroni liberi di muoversi sono relativamente pochi, queste sostanze hanno un comportamento intermedio tra i conduttori e gli isolanti e prendono il nome di *semiconduttori* (Fig. 6.10 (d)). Il numero degli elettroni liberi di muoversi ovviamente aumenta con la temperatura. Evidentemente anche per gli isolanti si verifica il passaggio di elettroni da una banda piena ad una vuota per effetto dell'energia termica ma questo è tanto più difficile quanto più la sostanza si avvicina ad un isolante ideale.

6.6 Distribuzione statistica dell'energia di un sistema di particelle identiche

Un problema di fondamentale importanza nello studio delle proprietà elettriche e termiche di un solido è quello della ripartizione degli elettroni sui livelli energetici delle diverse bande, in particolare di quelle di valenza.

Il problema è analogo a quello studiato a suo tempo da Maxwell per la ripartizione delle velocità e delle energie delle molecole di un gas e a quello più generale, studiato successivamente da Boltzmann, per la ripartizione dell'energia fra le particelle che costituiscono un sistema qualsiasi, anche assai complesso (si pensi ad esempio all'insieme dei numerosi oscillatori costituiti dagli atomi che in un solido vibrano attorno alla loro posizione di equilibrio).

La formula di Maxwell-Boltzmann, che dà la ripartizione dell'energia E di un gas costituito da molecole, in equilibrio termico e a temperatura T è data da:

$$dN = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N}{(KT)^{3/2}} e^{-E/KT} \sqrt{E} dE \quad (6.7)$$

ove $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$ joule/°K è la costante di Boltzmann che compare nell'equazione di stato dei gas perfetti, N è il numero di particelle per unità di volume.

La (6.7) fornisce il numero dN di molecole aventi energia compresa tra E e $E + dE$. Su di essa si fonda, come è ben noto, l'intera teoria cinetica dei gas.

La formula di Maxwell-Boltzmann non è più valida in quei problemi, come ad esempio lo studio del comportamento degli elettroni nei metalli, in cui gli effetti quantistici rivestono un ruolo importante. La sua generalizzazione al caso quantistico si presenta diversamente a seconda che le particelle che costituiscono il gas soddisfino (come avviene per gli elettroni) al principio di esclusione di Pauli o a seconda che tali particelle non soddisfino a detto principio.

Ricordiamo a questo proposito che l'esperienza dimostra che tutte e solo le particelle dotate di spin semidispari (in unità $h/2\pi$) soddisfano al principio di Pauli, mentre non vi soddisfano le particelle dotate di spin nullo o intero.

In particolare appartengono alla prima categoria, oltre agli elettroni, i protoni, i neutroni e tutti i nuclei aventi un numero di massa A dispari; appartengono invece alla seconda categoria le particelle α , i deutoni, i mesoni π e tutti i nuclei aventi un numero di massa A pari. Le particelle della prima categoria vengono chiamate *fermioni* (in onore al fisico Fermi), quelle che appartengono alla seconda vengono invece chiamate *bosoni* (in onore al fisico indiano Bose).

Nella teoria quantistica si hanno quindi per un sistema di particelle identiche due tipi distinti di statistica con relative formule diverse di distribuzione, e precisamente:

- a) quella di Fermi-Dirac, valida per i fermioni;
- b) quella di Bose-Einstein, valida per i bosoni.

Per comprendere la differenza fra le due statistiche consideriamo le due distribuzioni alla temperatura dello zero assoluto. Il sistema di particelle assumerà la distribuzione che compete alla energia minima. Valendo la statistica di Fermi-Dirac le N particelle, come conseguenza del principio di esclusione, si disporranno sugli N livelli più bassi (vedi Fig. 6.11 (a) in cui $N=5$).

Valendo invece la statistica di Bose-Einstein le N particelle si disporranno tutte sul livello fondamentale (vedi Fig. 6.11 (b) sempre per $N = 5$), la cui energia

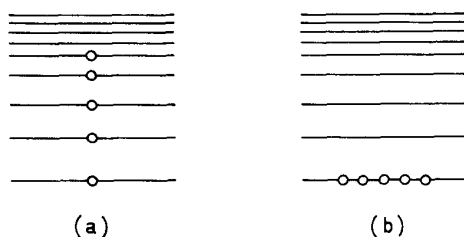


FIG. 6.11- Ripartizione di cinque particelle identiche nei livelli energetici alla temperatura dello zero assoluto

- a) nel caso di fermioni
- b) nel caso di bosoni.

già non è esattamente nulla in accordo alla teoria quantistica e come confermato dall'esperienza.

Si vede quindi come un sistema di fermioni possiede alla temperatura dello zero assoluto una energia (detta di *stato zero*) assai superiore a quella posseduta da un sistema di bosoni.

Aumentando la temperatura molte particelle compieranno delle transizioni verso i livelli più alti dando luogo ad una distribuzione energetica caratteristica della temperatura stessa. Riportiamo, senza dimostrazione, le due formule di distribuzione rispettivamente per un gas di fermioni e per un gas di bosoni in equilibrio termico alla temperatura T . Nel primo caso, che corrisponde alla *statistica di Fermi-Dirac*, il numero medio n_α di particelle che si trovano sul livello α -esimo, di energia E_α , è dato da:

$$n_\alpha = \frac{1}{A_F \exp(E_\alpha/KT) + 1} \quad (6.8)$$

dove la costante A_F viene determinata dalla condizione:

$$\sum_\alpha n_\alpha = N.$$

Nel secondo caso, che corrisponde alla *statistica di Bose-Einstein* si ha invece:

$$n_\alpha = \frac{1}{A_B \exp(E_\alpha/KT) - 1} \quad (6.9)$$

con A_B determinato dalla condizione:

$$\sum_\alpha n_\alpha = N.$$

La statistica di Fermi-Dirac trova applicazioni soprattutto nello studio del gas elettronico (quale quello responsabile della conduzione elettrica nei metalli o quello costituito dal complesso degli elettroni che avvolgono il nucleo di un atomo pesante). La statistica di Bose-Einstein trova invece le sue applicazioni di maggior interesse nello studio del gas di fotoni (di cui è ad esempio costituita la radiazione contenuta in una cavità chiusa) e nello studio delle proprietà dell'elio (isotopo He I) alle bassissime temperature (al disotto dei 3 °K).

6.7 Distribuzione elettronica nei metalli

Come abbiamo visto, la conduzione elettrica nei metalli è essenzialmente legata all'esistenza di una banda (detta di valenza) costituita da tanti livelli energetici assai prossimi l'uno all'altro e solo parzialmente occupati dagli elettroni *non legati*, cioè liberi di muoversi nel metallo e quindi capaci di dar luogo alla conducibilità sia elettrica sia termica.

Data la fittezza con cui sono distribuiti i livelli in una banda, nello studio di

molti problemi si può considerare la successione delle energie dei livelli come una variabile E continua. Ponendo inoltre:

$$A_F = \exp(-E_F/KT)$$

(6.10)

la (6.8) potrà scriversi

$$n(E) = \frac{1}{\exp[(E - E_F)/KT] + 1} \quad (6.11)$$

e darà il numero medio di elettroni che si trovano, in condizioni di equilibrio termico alla temperatura T , sul livello di energia E . Come conseguenza del fatto che gli elettroni soddisfano il principio di esclusione di Pauli, sarà $0 \leq n(E) \leq 1$. Il nuovo parametro E_F , introdotto nella formula di distribuzione di Fermi-Dirac (6.11), prende il nome di *energia di Fermi*. Questa grandezza è una funzione lentamente decrescente della temperatura (per molti problemi può considerarsi costante) e rappresenta l'energia del livello cui corrisponde una probabilità di occupazione uguale a 1/2.

Allo zero assoluto l'energia di Fermi è data dalla espressione ¹⁾:

$$E_{F0} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (6.12)$$

dove h è la costante di Planck, m la massa dell'elettrone ed n il numero di particelle per unità di volume. La dipendenza dalla temperatura dell'energia di Fermi può essere espressa in modo approssimato mediante la seguente relazione, valida per $E_F \geq kT$:

$$E_F \simeq E_{F0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kKT}{E_{F0}} \right)^2 \right]. \quad (6.13)$$

La differenza tra E_F ed E_{F0} è dell'ordine di $\frac{(KT)^2}{E_{F0}}$ ed alle temperature ordinarie

può essere trascurata.

Ciò che ha un diretto significato fisico non è però la funzione $n(E)$, ma il numero di particelle aventi energia tra E ed $E + dE$. Questo sarà dato da $dN = n(E) dQ(E)$ essendo $dQ(E) = \xi(E) dE$ il numero di livelli aventi energia compresa tra E ed $E + dE$. Nel caso dei conduttori metallici $\xi(E)$ è una funzione continua (almeno per le energie che interessano il moto degli elettroni di conduzione) e quindi non sussistono particolari problemi. Nel caso invece dei semiconduttori, al moto degli elettroni sono interessate due bande di energia, a distribuzione continua dei livelli, separate l'una dall'altra da un intervallo nel quale non esistono intervalli energetici: entro questo intervallo la funzione $\xi(E)$ è uguale a zero. Tornando al caso di conduttori metallici è possibile dimostrare (per la dimostrazione rinviamo a testi specializzati ²⁾, che la distribuzione

¹⁾ Vedi A. S. Dekker: *Solid State Physics* - MacMillan, Londra 1958.

²⁾ P. Caldirola: *Istituzioni di Fisica Teorica* - Editrice Viscontea, 1966

dei livelli energetici per il moto di un elettrone libero in un volume V è data da:

$$\xi(E) dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE. \quad (6.14)$$

Utilizzando la (6.11) otteniamo:

$$dN = n(E) \xi(E) dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{E^{1/2}}{\exp[(E - E_F)/KT] + 1} dE. \quad (6.15)$$

Per comprendere più a fondo il significato della formula di Fermi per la distribuzione degli elettroni di un solido, osserviamo che se non viene comunicata energia dall'esterno, cioè se il solido costituisce un sistema isolato, gli elettroni si distribuiscono sui livelli energetici disponibili in modo che l'energia del sistema risulti minima. Cioè per un solido, schermato da ogni tipo di radiazione e alla temperatura di 0 °K, gli N elettroni *liberi* costituiscono un sistema isolato ed occupano i primi N livelli di energia più bassa. Se dall'esterno viene aumentata la temperatura del sistema fino ad un valore T tale che la energia termica, approssimativamente eguale a KT , acquistata da un singolo elettrone risulti eguale alla differenza di energia tra l'ultimo livello occupato ed il primo libero, l'elettrone posto sull'ultimo livello occupato può compiere una transizione al livello superiore. Aumentando ulteriormente la temperatura, anche altri elettroni, situati su livelli più bassi, sono in grado di compiere transizioni a livelli superiori. Si determina quindi una modificazione della distribuzione degli elettroni dovuta all'assorbimento termico che porta in definitiva alla formula (6.11) di Fermi-Dirac relativa ad un gas elettronico in equilibrio termodinamico alla temperatura T .

Dalla (6.11) si ricava il grafico di $n(E)$. Tale grafico è riportato in Fig. 6.12 in corrispondenza delle temperature $T=0$ e $T > 0$.

Si può osservare che per $T = 0$ si ha una funzione a scalino e che non vi sono elettroni con energia maggiore ad E_F , mentre tutti i livelli con energia inferiore ad E_F sono occupati. Per $T > 0$ la curva a gradino si modifica come in Fig. 6.12. L'intervallo in cui si verifica lo scostamento dell'andamento a

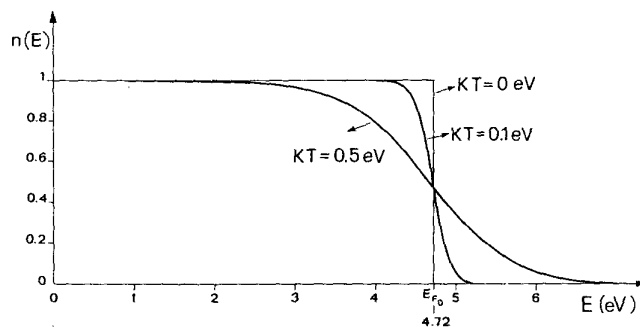


FIG. 6.12 - Distribuzione energetica di un metallo per tre differenti valori di KT .

gradino è dell'ordine di KT , poiché per $|E - E_F| > KT$ la curva non differisce molto da quella che si ha nel caso $T=0$.

Nell'approssimazione in cui gli elettroni di valenza di un solido sono considerati completamente liberi di muoversi, si può calcolare che il valore dell'energia di Fermi è di circa 5 eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ joule}$). Alle temperature usuali di lavoro dei solidi ($T < 2000 \text{ °K}$) l'energia termica è $KT \leq 0,2 \text{ eV}$. L'intervallo di energia in cui $n(E)$ si discosta dal comportamento a scalino è perciò molto piccolo e vi saranno pochissimi elettroni con energia maggiore dell'energia di Fermi.

La (6.15), il cui andamento è riportato in Fig. 6.13, rappresenta la funzione di distribuzione a cui soddisfa un gas di elettroni in luogo della funzione di Boltzmann (6.7). La differenza più evidente tra le due funzioni di distribuzione (6.7) e (6.15) è che, alla temperatura dello zero assoluto, la (6.15) prevede, a differenza della (6.7), una distribuzione di particelle con energia non nulla compresa tra zero e l'energia E_F di Fermi.

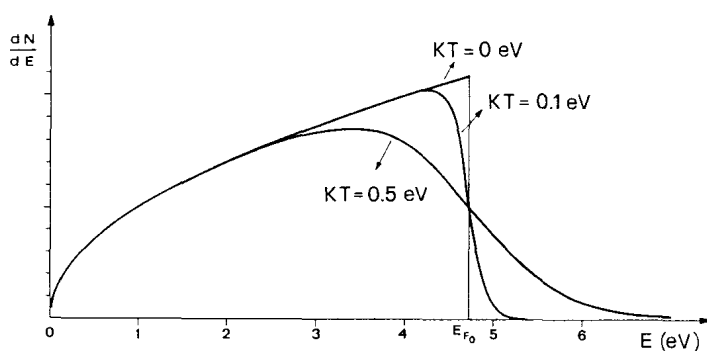


FIG. 6.13 - Funzione di distribuzione di un gas di elettroni per diversi valori di KT . Le ordinate sono in unità arbitrarie.

Nel caso in cui $\exp(E - E_F)/KT \gg 1$, la funzione di distribuzione di Fermi Dirac si riduce con buona approssimazione alla formula di Boltzmann. Questo avviene però nel caso in cui $(E - E_F) \gg KT$ e quindi, nei problemi che ci interessano, solo per la *coda* della funzione di distribuzione di Fermi-Dirac. Nel caso di temperatura assoluta uguale a zero, questa condizione non è verificata e pertanto la funzione di distribuzione di Fermi-Dirac si discosta notevolmente da quella di Boltzmann. Questa deviazione, che può presentarsi in maniera più o meno accentuata, secondo quanto detto, prende il nome di *degenerazione del gas*.

Un gas che segue la distribuzione di Boltzmann verrà chiamato non degenerare, mentre uno che segue la funzione di distribuzione di Fermi-Dirac è detto degenerare. Alla temperatura dello zero assoluto, il gas di elettroni è *completamente degenerare*.

Quanto detto può essere compreso tenendo conto delle profonde differenze esistenti tra un gas di elettroni ed un gas molecolare. Il fatto che gli elettroni

siano particelle cariche e che quindi esercitino tra loro forze repulsive non è l'aspetto più importante di tale comportamento, in quanto essi si muovono in presenza degli ioni del reticolo e perciò in un sistema macroscopicamente neutro. Le diversità essenziali ¹⁾ tra gas di elettroni e gas molecolare sono principalmente dovute all'elevata densità del gas di elettroni ed alla massa estremamente piccola di una singola particella rispetto a quella delle molecole di un qualunque gas. Nel caso del sodio monovalente si hanno $2,5 \times 10^{28}$ elettroni per m^3 , mentre in un gas a pressione e temperatura ordinaria si hanno 2×10^{25} molecole per m^3 .

¹⁾ P. Caldirola - Istituzioni di Fisica Teorica O.C.

7

La corrente elettrica stazionaria

Nei capitoli precedenti abbiamo trattato i problemi riguardanti l'interazione di cariche ferme, tra loro e con la materia. In questo capitolo ci occuperemo dei fenomeni connessi al moto stazionario delle cariche nei materiali. Come abbiamo infatti mostrato nel capitolo 6 esistono condizioni per le quali le cariche sono libere di muoversi all'interno dei corpi.

7.1 L'intensità di corrente

Collegando due conduttori, posti a diverso potenziale, per mezzo di un filo conduttore, si ha un flusso di cariche da un corpo all'altro che si interrompe soltanto quando i due corpi hanno assunto il medesimo potenziale. Tale flusso di cariche prende il nome di *corrente elettrica*. Si chiama intensità di corrente, normalmente indicata con il simbolo I , il rapporto tra la quantità di carica dq , che attraversa in un tempo infinitesimo dt una qualsiasi sezione del filo e dt stesso :

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

La quantità totale di carica elettrica che attraversa una sezione del conduttore in un intervallo di tempo i può essere quindi calcolata, una volta nota la funzione $I(t)$, mediante l'integrale:

$$q = \int_0^i I(t) dt \quad (7.2)$$

che nel caso particolare di correnti stazionarie, indipendenti cioè dal tempo, si riduce a $q = I\tau$. Il passaggio della corrente elettrica non è però legato alla presenza di un conduttore solido ma può anche avvenire per mezzo di semiconduttori, di elettroliti, di gas ionizzati (plasmi), nel vuoto e attraverso sostanze isolanti qualora si usi una forte differenza di potenziale tra i due corpi carichi. L'unità di corrente nel sistema M.K.S.Q. prende il nome di ampere ed è definita come la corrente (costante) che trasporta un coulomb in un secondo. Le dimensioni della corrente sono :

$$[I] = [q] [t]^{-1} \quad (7.3)$$

Come verso della corrente si prende, per convenzione, quello in cui si spostano le cariche positive.

7.2 La corrente come trasporto di cariche

La quantità di carica, che con il suo moto dà luogo alla corrente, in generale può essere costituita sia da cariche negative sia da cariche positive. In particolare nei conduttori metallici le cariche viaggianti sono elettroni mentre in altre sostanze, per esempio gli elettroliti o i gas ionizzati, anche ioni positivi o negativi possono contribuire alla corrente. Tutte le particelle cariche che con il loro moto generano una corrente si chiamano *portatori di cariche*.

È importante notare che portatori positivi e portatori negativi che si muovono in senso opposto contribuiscono alla corrente nel medesimo senso, come è mostrato in Fig. 7.1.

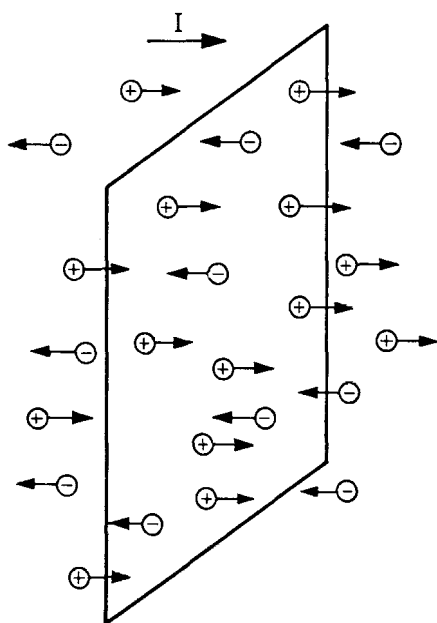


FIG. 7.1 - La corrente I è generata dal moto dei portatori di carica di entrambi i segni ed ha verso concorde con quello del moto dei portatori di carica positivi.

D'altra parte portatori di cariche di segno opposto che si muovono con la stessa velocità e nello stesso verso, trasportando la stessa quantità di carica, danno luogo ad una corrente nulla. Affinchè una certa sezione di un corpo venga perciò attraversata da una corrente è necessario che passi attraverso di essa un flusso *netto* di cariche.

Una distribuzione qualsiasi di cariche elettrostatiche produce inizialmente in un conduttore un campo elettrico. Come si è visto nel capitolo 2, gli elettroni del conduttore sotto l'azione di tale campo si mettono in moto e in un tempo estremamente breve raggiungono una nuova posizione di equilibrio corrispondente ad un campo elettrico nullo all'interno del conduttore. È quindi evidente che con una tale distribuzione di cariche non è possibile produrre una corrente stazionaria all'interno del corpo. Per generare una corrente stazionaria è necessario che il campo elettrico nel conduttore sia mantenuto ad un valore costante nel tempo e diverso da zero. Questo può essere ottenuto mediante opportuni sistemi (vedi paragrafo 7.7) capaci di mantenere una differenza di potenziale costante tra due sezioni del conduttore. Sotto l'effetto di un campo elettrico i portatori di carica positiva si muoveranno nella stessa direzione e verso del campo, quelli di carica negativa nel senso opposto. Data la convenzione assunta per il verso della corrente si può dire che la corrente ha la stessa direzione e lo stesso verso del campo elettrico ¹⁾.

Benché i portatori di carica si spostino da un punto all'altro all'interno di un conduttore, questo, in condizioni stazionarie, rimane globalmente neutro. Eventuali accumuli di carica sono annullati dall'insorgere di forze di natura elettrostatica molto intensa che ristabiliscono l'equilibrio. I tempi necessari (*tempo di rilassamento*) per dissipare un eventuale accumulo di carica sono molto brevi; nel caso di un conduttore metallico come il rame, per cui i portatori di carica sono gli elettroni, questo tempo risulta essere dell'ordine di 10^{-19} s. Il moto che i portatori di carica di un conduttore acquistano per la presenza di un campo elettrico è detto *moto di trascinamento* o *di deriva*. Sovrapposto a questo moto ordinato vi è un moto dovuto all'agitazione termica dipendente dalla temperatura del conduttore. La velocità termica è molto superiore a quella dovuta al moto di conduzione ma, a differenza di quest'ultimo, il moto termico non è ordinato e non dà quindi luogo all'insorgere di corrente.

Le correnti che rappresentano il moto di deriva dei portatori di carica sono chiamate *correnti di conduzione*. Nel caso in cui si considerino delle cariche libere in liquidi o gas, sottoposti a moto idrodinamico d'insieme, si parla di *correnti di convezione* cioè di correnti generate da trasporto di materia.

7.3 La densità di corrente

Prendiamo in esame un conduttore caratterizzato da N portatori di carica per unità di volume, tutti dello stesso tipo, con la stessa carica q e la stessa velocità

¹⁾ Questa affermazione, come sarà specificato in seguito, vale solo per i mezzi isotropi.

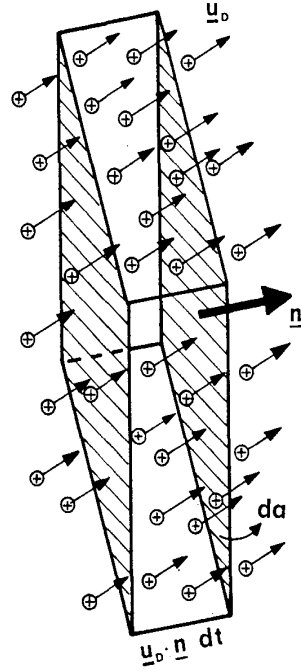


FIG. 7.2 - Quantità di carica che nel tempo dt attraversa un elemento di superficie da .

di trascinamento \mathbf{u}_d e calcoliamo la quantità di carica che attraversa un elemento infinitesimo di superficie da nel tempo dt . Come mostrato in Fig. 7.2 essa risulta essere la somma delle cariche contenute nel volume $\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} dt da$ dove \mathbf{n} rappresenta il versore normale a da .

L'intensità di corrente attraverso l'elemento infinitesimo da è:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{q N \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} dt da}{dt} \quad (7.4)$$

Nel caso si abbia a che fare con portatori di carica diversi, o per la carica o per la velocità o per entrambe, la relazione (7.4), indicando con l'indice k i differenti tipi di portatori, diviene:

$$dI = \sum_k N_k q_k \mathbf{u}_{Dk} \cdot \mathbf{n} da \quad (7.5)$$

Si definisce *densità di corrente* e si indica con il simbolo \mathbf{J} il vettore:

$$\mathbf{J} = \sum_k N_k q_k \mathbf{u}_{Dk} \quad (7.6)$$

Il vettore \mathbf{J} , che ha le dimensioni di una intensità di corrente per unità di superficie, nel sistema M.K.S.Q. si misura in ampere/m². La relazione (7.5) può essere scritta nella forma:

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (7.7)$$

e la corrente che attraversa una superficie S è data da:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da .$$

L'intensità di corrente può essere così definita come il flusso della densità di corrente \mathbf{J} .

Il principio di conservazione della carica implica che debba esistere una relazione che lega la densità di corrente uscente da una certa superficie chiusa con la variazione nel tempo della quantità di carica contenuta all'interno della stessa superficie. L'integrale della relazione (7.8) rappresenta infatti la rapidità con cui la carica esce dal volume V racchiuso da S . Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$I = - \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, dv \quad (7.9)$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che per convenzione prendiamo come positive le correnti entranti nel volume V .

Inoltre la quantità di carica contenuta in V può essere espressa come integrale esteso a V di una densità volumetrica di carica $\rho(x, y, z)$ e pertanto :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, y, z) \, dv . \quad (7.10)$$

Poiché il volume considerato non varia nel tempo, possiamo portare sotto il segno d'integrale l'operazione di derivazione ottenendo:

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv . \quad (7.11)$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (7.9) abbiamo:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} \right) dv = 0 \quad (7.12)$$

e per l'arbitrarietà del volume V in definitiva si trova la relazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (7.13)$$

detta *equazione di continuità*.

In condizioni stazionarie, nel caso cioè che le grandezze elettriche non varino nel

tempo, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e la equazione di continuità diviene semplicemente:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (7.14)$$

Nel caso di correnti stazionarie il vettore \mathbf{J} risulta così essere un vettore solenoidale. Inoltre la parete laterale di un conduttore rappresenta un tubo di forza di \mathbf{J} . Infatti il vettore \mathbf{J} non può avere componenti perpendicolari a superficie limite isolate di un conduttore perché ciò comporterebbe un accumulo di cariche e un campo elettrostatico crescente in contraddizione con le condizioni di stazionarietà assunte. Essendo \mathbf{J} un vettore solenoidale, abbiamo infine che il suo flusso attraverso una qualsiasi sezione del conduttore è costante e quindi l'intensità di corrente è anch'essa costante.

7.4 La conducibilità elettrica nei metalli

Per quanto riguarda i conduttori metallici, gli elettroni della banda di conduzione hanno a disposizione un intervallo di livelli permessi praticamente continuo ed inoltre, in tale intervallo, gli effetti di *degenerazione quantistica*, pur essendo abbastanza rilevanti, possono essere trascurati nell'ambito di una descrizione qualitativa sufficiente ad illustrare il meccanismo della conducibilità elettrica. Pertanto, almeno in questa grossolana approssimazione, potremo ritenere che per gli elettroni di conduzione valga una distribuzione di tipo Maxwelliano. Gli elettroni di conduzione all'interno di un metallo potranno così essere pensati come un gas di particelle in equilibrio termico con gli ioni del reticolo cristallino. Questi oscillano intorno alla loro posizione di equilibrio con ampiezza di oscillazione tanto maggiore quanto più alta è la temperatura. Gli elettroni, in assenza di forze esterne, sono dotati di un moto disordinato, Fig. 3 (a), cioè di un moto senza alcuna direzione privilegiata e la velocità media che essi posseggono, detta velocità termica e indicata con u_T , è proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta del metallo. Gli elettroni durante il loro moto disordinato urtano contro gli ioni del reticolo. Essendo entrambe le particelle cariche, tale urto va considerato come una interazione di carattere coulombiano in cui

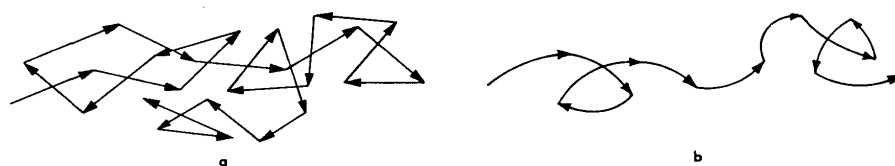


FIG. 7.3 - a) Moto disordinato degli elettroni dovuto all'energia termica in assenza di forze esterne.

b) Moto di deriva degli elettroni in presenza di un campo elettrico applicato sovrapposto al moto termico.

la traiettoria dell'elettrone subisce una deviazione. Gli scambi di energia che avvengono durante l'urto sono quelli che permettono l'instaurarsi di condizioni di equilibrio termodinamico tra gas elettronico e ioni del reticolo.

Indichiamo con r il tempo medio che intercorre tra due urti e con l il cammino percorso in media dall'elettrone tra due urti successivi (*libero cammino medio*). Queste due quantità sono legate dalla relazione:

$$\tau = \frac{l}{u_r}.$$

Il tempo τ è una caratteristica di ogni sistema. In questa trattazione considereremo le collisioni indipendenti tra loro e completamente scorrelate. Questo significa che la velocità dell'elettrone dopo un urto non ha nessuna relazione con quella precedente all'urto.

Se applichiamo al conduttore metallico un campo elettrico esterno, gli elettroni di conduzione, come già detto, avranno, sovrapposto al moto termico disordinato, un moto d'insieme in direzione opposta a quella del campo elettrico con una velocità media chiamata *velocità di deriva* (Fig. 7.3 (b)). La velocità media d'insieme di questo moto ordinato è molto minore della velocità termica: per esempio in un filo conduttore di sezione uguale ad 1 cm^2 percorso da una corrente di 10 ampere la velocità media di deriva è dell'ordine di 10^{-4} cm/s , mentre la velocità termica dell'elettrone è dell'ordine di 10^6 cm/s .

Non bisogna però confondere la velocità ordinata degli elettroni con la velocità con cui il moto ordinato si propaga a tutti gli elettroni del conduttore. Infatti, applicando una differenza di potenziale ai capi di un conduttore, il campo elettrico si propaga in esso con una velocità molto prossima alla velocità della luce e il moto d'insieme in un punto inizia nell'istante in cui si stabilisce il campo elettrico.

Poiché abbiamo visto che la velocità di deriva è molto minore della velocità termica, possiamo considerare che anche in presenza di un campo elettrico il tempo medio che intercorre tra due collisioni sia ancora τ . Inoltre ammetteremo che in ogni collisione l'elettrone ceda allo ione tutta l'energia acquistata dal campo elettrico nell'intervallo di tempo trascorso tra due urti.

Avendo definito τ come il tempo medio che intercorre tra due collisioni, ricaviamo il numero di urti che avvengono tra N particelle in un tempo dt . Una particella in un tempo dt ha una probabilità di subire un urto pari a dt/τ . Il numero medio di urti di N particelle nel tempo dt risulta quindi essere $N dt/\tau$.

Supponiamo che il gas di elettroni sia composto da N_0 particelle. Indichiamo con $N(t)$ il numero di elettroni che all'istante t a partire da un istante $t = 0$ non hanno ancora subito collisioni. Il numero $N(t + dt)$ di particelle che all'istante $t + dt$ non ha ancora subito una collisione è ovviamente minore di $N(t)$ e per quanto detto sopra, sarà uguale a:

$$\text{da cui, tenendo conto che} \quad N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}, \quad (7.16)$$

$$N(t + dt) = N(t) + \frac{dN}{dt} dt,$$

avremo

$$dN(t) = -N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (7.17)$$

Questa quantità rappresenta il numero di elettroni che hanno subito una collisione nell'intervallo di tempo dt dopo il tempo t . Integrando la relazione (7.17) otteniamo:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (7.18)$$

dove la costante di integrazione è stata determinata tenendo conto del fatto che per $t = 0$ tutte le particelle devono ancora subire un urto.

La probabilità che una particella non abbia subito al tempo t alcun urto è data da:

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Da questa relazione si vede che dopo un tempo $t = \tau$, a partire da un'istante iniziale arbitrario, la probabilità che un elettrone non abbia subito un urto è uguale ad $1/e \approx 0,37$.

Calcoliamo ora il tempo medio che intercorre tra un istante arbitrario t e la successiva collisione. All'istante t il numero di particelle che non ha ancora subito una collisione è $N(t)$ e il numero di elettroni che subiranno una collisione nell'intervallo di tempo dt successivo a t sarà $N(t) dt/\tau$. Evidentemente per questi elettroni l'intervallo di tempo che intercorre fino alla collisione successiva è proprio t . Pertanto possiamo scrivere che il tempo medio fino alla collisione successiva è:

$$\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t N(t) \frac{dt}{\tau} \quad (7.19)$$

$$(7.19)$$

che utilizzando la (7.18), dà come risultato: $\bar{t} = \tau$ (7.20)

Per la natura statistica del fenomeno ovviamente si ha inoltre che il tempo medio a partire da un istante t fino alla collisione successiva, cioè τ , è uguale al tempo medio trascorso dall'ultimo urto.

Siamo in grado ora di calcolare la velocità media di deriva acquistata da un elettrone di conduzione per effetto del campo elettrico applicato. Questa velocità media risulterà essere uguale al prodotto dell'accelerazione dovuta al campo elettrico - eE/m , dove m è la massa dell'elettrone, per il tempo medio a partire dall'ultima collisione. Quindi:

$$u_D = -\frac{eE}{m} \tau. \quad (7.20)$$

Dalla relazione (7.6) sappiamo inoltre che la densità di corrente nel conduttore è:

$$J = -eN u_D. \quad (7.21)$$

Sostituendo in questa formula l'espressione precedente di u_D abbiamo che:

$$J = \frac{e^2 \tau N}{m} E = \sigma E. \quad (7.22)$$

Siamo così arrivati a determinare una relazione che lega la densità di corrente in un metallo con il campo elettrico applicato. La costante di proporzionalità:

$$\sigma = \frac{e^2 \tau N}{m} = \frac{e^2}{m} \frac{IN}{u_T} \quad (7.23)$$

si chiama *conducibilità elettrica*. Essa dipende dalla natura del conduttore tramite il libero cammino medio ed il numero di portatori per unità di volume N e dalla temperatura tramite u_T . La conducibilità rappresenta la risposta elettrica del conduttore al campo elettrico E e quindi permette di valutare l'ostacolo che gli elettroni incontrano nel loro moto ordinato all'interno del corpo.

La relazione (7.22) descrive un caso particolare, verificato approssimativamente in un gran numero di conduttori, detti mezzi lineari ed isotropi. Nel caso più generale di mezzi anisotropi e non lineari questa relazione diviene:

$$\mathbf{J} = \hat{\epsilon} (\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \quad (7.24)$$

dove $\hat{\epsilon}$ è un tensore del secondo ordine le cui componenti possono dipendere dall'intensità del campo elettrico.

7.5 La resistività. Legge di Ohm

L'inverso della conducibilità $\rho = 1/\sigma$ è chiamato *resistività elettrica*. Nel sistema M.K.S.Q. l'unità di misura della resistività è il volt-metro/ampere o ohm-metro. L'ohm è definito nella seguente maniera :

$$1 \text{ ohm} = \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ ampere}}. \quad (7.25)$$

L'unità di misura della conducibilità è l'ohm⁻¹ · metro⁻¹ o mho/metro. Nella Tabella 7.1 sono riportati i valori di ρ per alcuni materiali; è possibile notare come la resistività per i metalli più comuni è dell'ordine di 10⁻⁷-10⁻⁸ ohm-metro mentre per gli isolanti la resistività è più grande di un fattore che può andare da 10²⁰ a 10²⁴.

Consideriamo ora un conduttore metallico lineare isotropo costituito da un filo rettilineo di lunghezza l , di sezione uniforme S , omogeneo e con conduttività σ

e supponiamo che tra le estremità del filo sia mantenuta una differenza di potenziale costante ΔV ¹⁾. All'interno del filo esiste un campo elettrico \mathbf{E} legato alla differenza di potenziale dalla relazione:

$$\Delta V = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.26)$$

Se il filo è rettilineo e lungo rispetto alle dimensioni della sua sezione, le linee di forza di \mathbf{E} sono parallele ed il campo elettrico risulta uniforme lungo il filo. Pertanto la (7.26) diviene:

$$\Delta V = El. \quad (7.27)$$

Il campo elettrico applicato al filo produce una corrente di densità $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ e, poiché abbiamo assunto che il conduttore è isotropo e che \mathbf{E} è uniforme, \mathbf{J} è costante in modulo e direzione. La corrente che attraversa una qualsiasi sezione del conduttore è:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = JS \quad (7.28)$$

dove S è l'area della sezione del filo. Utilizzando la (7.27), la (7.28) e la relazione (7.22) otteniamo:

$$I = \frac{\sigma S}{l} \Delta V. \quad (7.29)$$

$$(7.29)$$

Questa espressione può essere scritta anche nella forma:

$$\Delta V = RI \quad (7.30)$$

dove $R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}$ è una quantità che viene chiamata *resistenza elettrica* del filo conduttore. La resistenza dipende dalla sostanza di cui è fatto il filo conduttore, dalla sua lunghezza e dalla sua sezione. Nel sistema M.K.S.Q. l'unità di misura della resistenza è l'ohm: si dice che un conduttore presenta la resistenza di 1 ohm quando applicando ai suoi estremi una differenza di potenziale di 1 volt è percorso da una corrente di 1 ampere.

La relazione (7.30), nota come *legge di Ohm*, storicamente è stata introdotta come legge sperimentale prescindendo dalle considerazioni microscopiche per mezzo delle quali è stata ottenuta in questo paragrafo. Essa rappresenta la relazione esistente tra la intensità di corrente che percorre un conduttore e la differenza di potenziale applicata alla sue estremità.

¹⁾ In questo capitolo, riferendoci alle notazioni di uso pratico, indicheremo con V il potenziale di un punto rispetto ad un potenziale di riferimento e con ΔV la differenza di potenziale tra due punti. E ovviamente chiaro dal contesto quando il simbolo V stia ad indicare potenziale o volume.

La legge di Ohm nella forma (7.30) è stata ricavata nell'ipotesi che la conducibilità σ sia indipendente dall'intensità del campo elettrico applicato. Solo in questo caso la dipendenza tra la corrente e la differenza di potenziale è lineare. L'ipotesi di linearità cade quando l'intensità del campo elettrico diviene così elevata da modificare i processi di collisione descritti nel paragrafo precedente.

Nel caso di conduttori metallici la resistività è indipendente dal campo elettrico per un ampio intervallo di valori ma dipende dalla temperatura. Abbiamo infatti visto che l'insorgere di una corrente in un conduttore è dovuto al moto ordinato degli elettroni di conduzione; tale moto è ostacolato dalle collisioni che gli elettroni effettuano con gli ioni del reticolo e che sono tanto più probabili quanto maggiore è l'ampiezza delle oscillazioni degli ioni e perciò quanto maggiore è la temperatura del conduttore. Risulta così che, fissata una differenza di potenziale ai capi di un conduttore, facendo crescere la temperatura il flusso ordinato degli elettroni all'interno del conduttore è maggiormente ostacolato. Si può dimostrare che per l'aumento della resistività di un metallo con la temperatura vale una legge del tipo :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + a(T - T_0) + b(T - T_0)^2 + c(T - T_0)^3 \dots] . \quad (7.31)$$

Dove ρ_0 è la resistività alla temperatura T_0 , ed a , b e c sono coefficienti il cui valore decresce via via più rapidamente di quanto non aumenti il corrispondente termine elevato a potenza.

Nell'intervallo di temperature nel quale operano normalmente i conduttori metallici, si ha una buona approssimazione per l'andamento della resistività con la temperatura, prendendo in considerazione solo il termine in $(T - T_0)$.

In questo modo abbiamo una dipendenza lineare della resistività dalla temperatura del tipo :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + a(T - T_0)] . \quad (7.32)$$

Il coefficiente di variazione della resistività, detto *coefficiente di temperatura*, è definito dalla seguente espressione:

$$a = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} . \quad (7.33)$$

Nella Tabella 7.1 sono riportati i coefficienti di temperatura di alcuni materiali.

Per i semiconduttori il coefficiente di temperatura, a differenza di quanto succede per i conduttori, è una quantità negativa e di conseguenza la resistività di questi materiali diminuisce all'aumentare della temperatura. Un tale comportamento è facilmente interpretabile mediante la teoria delle bande tenendo conto che all'aumentare della temperatura aumenta il numero degli elettroni in grado di superare l'intervallo proibito e di raggiungere la banda di conduzione ove sono disponibili livelli permessi di energia non occupati. Il risultato di questo comportamento è un aumento della conducibilità del materiale. Sulla variazione della resistenza con la temperatura si basa il principio di funzionamento del

Tabella 7.1.

| Materiale | Resistività a 20 °C (ohm·metro) | Coefficiente di temperatura (°C ⁻¹) |
|-------------------------|------------------------------------|--|
| Argento | $1,59 \times 10^{-8}$ | 0,0038 |
| Rame | $1,72 \times 10^{-8}$ | 0,00349 |
| Oro | $2,44 \times 10^{-8}$ | 0,0034 |
| Alluminio | $2,82 \times 10^{-8}$ | 0,0039 |
| Tungsteno | $5,6 \times 10^{-8}$ | 0,0045 |
| Zinco | $5,8 \times 10^{-8}$ | 0,0037 |
| Nichel | $7,8 \times 10^{-8}$ | 0,006 |
| Platino | 10×10^{-8} | 0,003 |
| Ferro puro | 10×10^{-8} | 0,005 |
| Costantana | 49×10^{-8} | 0,0001 |
| Mercurio | $95,78 \times 10^{-8}$ | 0,00089 |
| Manganese | 185×10^{-8} | — |
| Carbone (0 °C) | 349×10^{-7} | - 0,0005 |
| NaCl (soluzione satura) | 0,044 | - 0,0005 |
| Germanio | 0,46 | - 0,048 |
| Silicio | 640 | - 0,075 |
| Acqua distillata | 5×10^3 | — |
| Legno | 10^8 | — |
| Vetro ordinario | 10^{10} | — |
| Ambra | 5×10^{14} | — |
| Quarzo fuso | $>5 \times 10^{16}$ | — |

bolometro, strumento che consente di misurare piccole variazioni di temperatura, quali quelle prodotte da assorbimento di energia radiante da parte di un semiconduttore.

In alcuni metalli (*Th*, *Tl*, *Ta*, *In*, *Hg*, *Sn*, *Pb*) si nota una forte variazione di conduttività quando vengono portati al di sotto di un certo valore critico della temperatura. (4,19 °K per *Hg*, 3,74 °K per *Sn*, 7,2 °K per *Pb*). Al di sotto di questo valore critico la resistività del metallo diminuisce di un fattore di circa 10^{-12} rispetto alla resistività che si ha alla temperatura normale: si suol dire che un siffatto metallo si comporta come un *superconduttore*. La temperatura critica dipende sia dalla purezza chimica sia dalla perfezione metallurgica del campione. In un campione molto puro e preparato accuratamente si può avere una regione di transizione da stato conduttore a stato superconduttore compresa in un intervallo di un millesimo di grado Kelvin.

7.6 Tempo di rilassamento

Vogliamo mostrare con un semplice calcolo come sia possibile ricavare l'ordine di grandezza del tempo necessario in un conduttore per eliminare accumuli di carica. A questo scopo consideriamo un conduttore metallico omogeneo con

conducibilità elettrica σ e supponiamo che in una regione limitata del conduttore si generi ad un certo istante, che prenderemo come istante iniziale, un accumulo di elettroni con densità di carica volumetrica $\rho_0(x, y, z)$.

Tra la regione carica negativamente, quella cioè ove si è verificato l'accumulo di elettroni, e quella carica positivamente, quella cioè rimasta povera di elettroni, si creerà un campo elettrostatico \mathbf{E} ; questo campo, che ha la direzione e il verso che va dalla regione carica positivamente a quella carica negativamente, dà luogo ad un movimento degli elettroni e quindi a una corrente secondo la relazione :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Sappiamo inoltre che il campo elettrostatico è legato alla densità di carica volumetrica tramite la legge

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e che la densità di carica ρ e la densità di corrente debbono soddisfare all'equazione di continuità:

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

che lega la variazione nel tempo delle cariche contenute nella regione carica negativamente con la densità di corrente che fluisce da questa regione. Dall'equazione di continuità abbiamo:

$$\text{div } \mathbf{J} = \sigma \text{div } \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho}{\epsilon_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.34)$$

In questa espressione è necessario fare attenzione a non confondere la ρ , densità di carica volumetrica che vi compare, con la resistività elettrica introdotta nel paragrafo precedente. La (7.34) può anche essere scritta nella forma facile da integrare:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dt. \quad (7.35)$$

Integrando e passando dall'espressione logaritmica a quella esponenziale si ha:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}. \quad (7.36)$$

La costante di integrazione è stata determinata tenendo conto che al tempo $t = 0$ la densità di carica volumetrica è ρ_0 . Dalla relazione (7.36) possiamo ricavare il tempo occorrente perché la densità iniziale si riduca di $1/e$. Questo tempo è quello che, nel paragrafo 7.2, abbiamo chiamato *tempo di rilassamento*. Nel caso del rame, Fig. 7.4, per il quale $\sigma \approx 6 \cdot 10^7$ mho/metro, ricordando che $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ farad/metro, abbiamo che $\tau = \epsilon_0/\sigma \approx 10^{-19}$ secondi. Questo

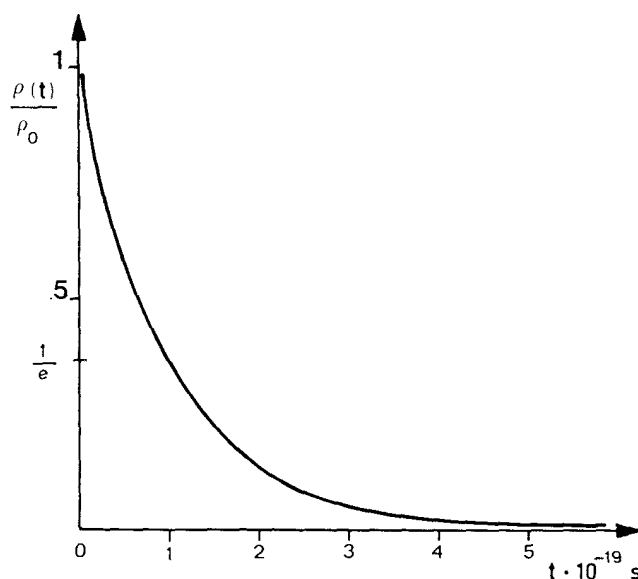


FIG. 7.4 - Evoluzione temporale della variazione di un accumulo di carica volumetrica $\rho(x, y, z)$ in un conduttore.

tempo è veramente piccolo ed è considerevolmente minore anche del tempo medio di collisione tra elettroni, che risulta essere dell'ordine di 10^{-14} secondi.

7.7 Forze elettromotrici

Un conduttore è percorso da una corrente stazionaria, secondo la legge di Ohm, quando ai suoi capi venga applicata una differenza di potenziale costante. I dispositivi capaci di fornire e mantenere tale differenza di potenziale sono detti *generatori elettrici*. Sono chiamati poli del generatore i due punti tra i quali va collegato il conduttore in cui si vuole che passi la corrente.

Si è visto che nell'ambito dei fenomeni indipendenti dal tempo il campo elettrico è conservativo; ciò significa che se consideriamo un circuito chiuso percorso da corrente, per esempio un circuito formato da un conduttore e da un generatore elettrico, ed eseguiamo la circuitazione del campo elettrostatico \mathbf{E} lungo tale circuito, troviamo che essa è nulla. Da ciò segue che non può essere il campo elettrostatico a far circolare le cariche all'interno del circuito, dato che il lavoro da esso compiuto è nullo, ma che devono esistere altre forze di tipo non conservativo che agiscono sulle cariche e producono il movimento ordinato e quindi la corrente. Tali forze saranno localizzate all'interno del generatore.

D'altra parte la relazione:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (7.37)$$

è valida solo per conduttori omogenei e quindi perde di validità nel caso di un circuito in cui sia inserito un generatore. In generale essa non è più vera per conduttori non omogenei o nelle regioni di contatto tra due conduttori diversi. Secondo la (7.37) ad una densità di corrente \mathbf{J} nulla in un punto di un conduttore deve corrispondere nello stesso punto un campo elettrico nullo.

In realtà nella zona di passaggio tra un conduttore ed un altro, o più in generale nelle zone non omogenee, la situazione di equilibrio è rappresentata, come si vedrà, da una corrente nulla e da un campo elettrostatico diverso da zero, che si oppone al manifestarsi di un moto di cariche, prodotto da forze non conservative di natura diversa. Per tener conto di queste forze introduciamo un vettore \mathbf{E}_i che ha le dimensioni di una forza per unità di carica. Pertanto la legge (7.37) potrà essere scritta nella forma:

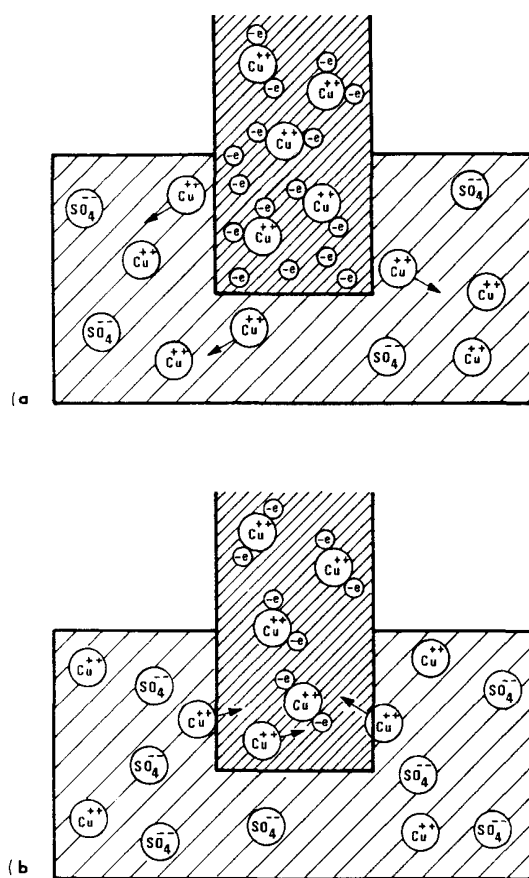
$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) . \quad (7.38)$$

Per illustrare questo concetto riportiamo alcuni tra gli esempi più comuni. Consideriamo la disomogeneità costituita dalla superficie di separazione tra due conduttori metallici diversi indicati con A e B . Supponiamo che il conduttore A abbia un livello di Fermi con una energia maggiore del livello di Fermi del corpo B . Alcuni elettroni appartenenti al corpo A passano nel corpo B perché in questo trovano a disposizione livelli energetici liberi di energia minore. Durante questo fenomeno si ha un moto di elettroni dal corpo A al corpo B . In questo modo il corpo B , possedendo un eccesso di elettroni, assumerà un potenziale negativo rispetto al corpo A impoverito di elettroni. Si crea pertanto un campo elettrostatico \mathbf{E} che si oppone al flusso di elettroni rendendo la \mathbf{J} nulla. In questo esempio la forza non conservativa è dovuta alla differenza tra i livelli di Fermi dei due metalli. In condizioni di equilibrio inoltre la forza elettrostatica è uguale e contraria alla forza prodotta dalla disomogeneità.

Un altro caso è quello che si presenta in una soluzione acquosa diluita ¹⁾ di HCl, una soluzione di questo tipo è conduttrice e prende il nome di soluzione elettrolitica. Supponiamo inoltre che nella soluzione esista un gradiente di concentrazione. A causa della non omogeneità della concentrazione si ha un moto di diffusione degli ioni H^+ e Cl^- dalla regione a concentrazione più alta a quella a concentrazione più bassa. Essendo la velocità di diffusione degli ioni H^+ maggiore di quella degli ioni Cl^- , per effetto della loro differenza di massa, si genera una corrente elettrica nella direzione in cui diminuisce la concentrazione.

Questa corrente è generata dal fenomeno della diffusione, che in questo esempio rappresenta la forza non conservativa. Essa accumula cariche positive nella regione a concentrazione minore e cariche negative in quella a concentrazione maggiore, in tal modo si origina un campo elettrico che si oppone alla diffusione degli ioni H^+ ed accelera gli ioni Cl^- . Si stabilisce quindi uno stato

¹⁾ Per soluzione diluita si intende una soluzione in cui lo HCl sia praticamente del tutto dissociato in ioni H^+ e Cl^- .

FIG. 7.5. - Conduttore di rame immerso in una soluzione di CuSO_4

a) soluzione diluita - b) soluzione concentrata.

di equilibrio in cui il campo elettrostatico compensa l'effetto determinato dalla differenza di velocità di diffusione delle due specie: la (7.38) diviene $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = 0$. Il campo \mathbf{E}_i è presente solo nelle zone in cui vi sono gradienti di concentrazione e in queste regioni è uguale a $-\mathbf{E}$, campo elettrostatico. Nei punti esterni all'elettrolita il campo \mathbf{E}_i è nullo mentre il campo elettrostatico \mathbf{E} ha un determinato valore che può essere calcolato mediante le equazioni della elettrostatica tenendo conto delle condizioni al contorno.

Riveste notevole importanza il fenomeno connesso al contatto tra un metallo ed un elettrolita : in particolare una sbarra di rame immersa in una soluzione diluita di Cu SO_4 (Fig. 5 (a)). In una soluzione diluita la tensione di soluzione del metallo non è equilibrata dalla pressione degli ioni Cu^{++} in soluzione. Come conseguenza sull'elettrodo metallico si esercitano delle forze che tendono a portare altri ioni Cu^{++} in soluzione. Vi è perciò un flusso di cariche dall'elettrodo all'elettrolita e come conseguenza l'accumulo di una carica negativa sul rame e di

una positiva nella soluzione. Si stabilisce così un campo elettrostatico \mathbf{E} diretto dallo strato di soluzione prossimo all'elettrodo verso l'elettrodo stesso. All'equilibrio l'intensità di tale campo compensa quella del campo \mathbf{E}_i prodotto dalla tensione di soluzione.

Il campo \mathbf{E}_i è diverso da zero solo in una regione molto prossima alla superficie di separazione elettrodo-soluzione. Per questo motivo si può parlare di un salto di potenziale V_{21} localizzato nello strato di separazione tra elettrodo (1) ed elettrolita (2)

$$V_{21} = \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.39)$$

In una soluzione concentrata la pressione degli ioni Cu^{++} è maggiore della tensione di soluzione del metallo e si ha quindi un deposito di ioni Cu^{++} sull'elettrodo di rame che di conseguenza si carica positivamente mentre la soluzione rimane carica negativamente (Fig. 5 (b)). Per il calcolo della differenza di potenziale che si genera nello strato di separazione si può ripetere un ragionamento analogo al precedente.

Trattiamo ora in particolare un esempio classico di generatore elettrostatico: la *pila Daniel*. Esso è costituito da un elettrodo di rame immerso in una soluzione concentrata di CuSO_4 e da un elettrodo di zinco immerso in una soluzione diluita di ZnSO_4 , come mostrato in Fig. 7.6 (a). Le due soluzioni sono separate da un setto poroso che permette soltanto il passaggio degli ioni SO_4^{--} .

Per quanto già detto, gli ioni Zn^{++} passano dall'elettrodo alla soluzione, quelli Cu^{++} dalla soluzione all'elettrodo. Come risultato abbiamo che l'eccesso di ioni SO_4^{--} creatosi nella zona CuSO_4 , si sposta verso la zona ZnSO_4 , dove invece vi è difetto di tali ioni. Tale flusso ha come scopo quello di mantenere le due soluzioni allo stesso potenziale. All'equilibrio si ha quindi:

$$V_{\text{Zn}} < V_{\text{ZnSO}_4} = V_{\text{CuSO}_4} < V_{\text{Cu}} \quad (7.40)$$

L'elettrodo di rame assume perciò un potenziale maggiore di quello assunto dall'elettrodo di zinco. Collegando esternamente i due elettrodi con un conduttore si genera una corrente che va dal rame allo zinco, dovuta al moto degli elettroni che si spostano dallo zinco al rame.

Mentre nel conduttore esterno la corrente va dal rame allo zinco, ed è trasportata dagli elettroni, nell'elettrolita la corrente va dallo zinco al rame, ed è trasportata

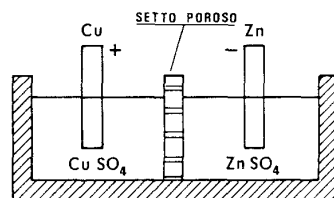


FIG. 7.6 a) - Schema di una pila Daniel.

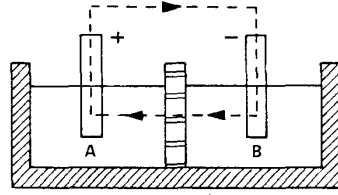


FIG. 7.6 b) - Cammino utilizzato per il calcolo della f.e.m. della pila.

dagli ioni negativi SO_4^{2-} . La corrente stazionaria è mantenuta nel circuito per mezzo del lavoro compiuto nell'elettrolita dal campo \mathbf{E}_i che fa muovere le cariche SO_4^{2-} contro il campo elettrostatico \mathbf{E} .

Si chiama *forza elettromotrice della pila* (f.e.m.) il lavoro fatto dal campo \mathbf{E}_i per portare una carica positiva unitaria entro la cella dall'elettrodo negativo a quello positivo. Nel caso in cui i due conduttori (poli) non siano collegati esternamente, non essendoci passaggio di corrente, si avrà $\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}$ e si può definire la forza elettromotrice come il lavoro fatto dal campo elettrico \mathbf{E} per portare la carica positiva unitaria dall'elettrodo positivo a quello negativo; la forza elettromotrice cioè è uguale alla differenza di potenziale esistente tra i poli a circuito aperto.

Si può analogamente definire la f.e.m. come il lavoro fatto dal campo totale $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$ su una carica positiva unitaria che percorra una linea chiusa che passi per gli elettrodi internamente alla pila e si richiuda esternamente ad essa, come si vede in Fig. 7.6 (b). Tale lavoro risulta :

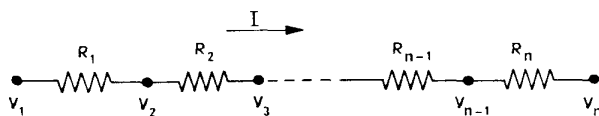
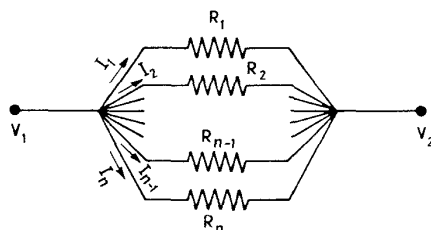
$$\begin{aligned}
 L &= \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \\
 &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \\
 &= \int_B^A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \text{f.e.m.} .
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

I generatori elettrici, di cui la pila Daniel è un esempio, sono caratterizzati da due grandezze: la forza elettromotrice e la resistenza interna, che è la resistenza che incontra la corrente nell'attraversare il generatore.

7.8 Collegamenti tra resistori

La resistenza di un conduttore dipende dalla natura del materiale, attraverso la resistenza specifica, e dalla sua geometria, cioè nel caso di un filo, dalla sua sezione e dalla sua lunghezza.

Si chiama *resistere* un conduttore caratterizzato esclusivamente dal *valore della resistenza*. Diversi resistori collegati insieme formano una *rete resistiva*, mentre

FIG. 7.7 a) - Collegamento di n resistori in serie.FIG. 7.7 b) Collegamento di n resistori in parallelo.

una successione chiusa di resistori e generatori di forza elettromotrice, più altri elementi che introdurremo in seguito, formano un *circuito*.

Un insieme di n resistori, con valore della resistenza R_1, R_2, \dots, R_n , è detto essere *collegato in serie* se gli n conduttori sono percorsi dalla stessa corrente I e disposti come in Fig. 7.7 (a).

Applicando a ciascuna delle n resistenze la legge di Ohm abbiamo:

$$V_1 - V_2 = IR_1, \quad V_2 - V_3 = IR_2, \dots, V_{n-1} - V_n = IR_n. \quad (7.42)$$

Sommando tutti i termini otteniamo:

$$V_1 - V_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (7.43)$$

dove $V_1 - V_n$ rappresenta la differenza di potenziale tra i capi della serie dei resistori. La somma delle resistenze $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ prende il nome di *resistenza totale* o *equivalente* del sistema.

La disposizione di n resistori, di resistenza R_1, R_2, \dots, R_n , mostrata in Fig. 7.7 (b), viene chiamata *collegamento in parallelo*. Questo tipo di collegamento è caratterizzato dal fatto che ai capi di ogni resistore è applicata la stessa differenza di potenziale. Per la legge di Ohm applicata a ciascuno degli n resistori possiamo scrivere:

$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} = I_1, \quad \frac{V_1 - V_2}{R_2} = I_2, \quad \dots, \quad \frac{V_1 - V_2}{R_n} = I_n. \quad (7.44)$$

Sommando questi termini tra loro otteniamo:

$$(V_1 - V_2) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = (I_1 + I_2 + \dots + I_n) = I \quad (7.45)$$

dove abbiamo indicato con I la corrente totale. L'inverso della resistenza totale o equivalente R del collegamento in parallelo, per la (7.45), risulta essere data da:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

7.9 Legge di Ohm generalizzata

Poniamo tra i poli di un generatore, di forza elettromotrice \mathcal{E} e di resistenza interna r , un resistore con resistenza R , come mostrato in Fig. 7.8. Poiché la circuitazione del campo elettrostatico lungo il circuito è nulla, la variazione del potenziale su tutto il circuito deve essere ugualmente nulla. Dalla legge di Ohm sappiamo che la caduta di potenziale attraverso i conduttori è uguale al prodotto della loro resistenza per la corrente che li attraversa. Nel nostro esempio la caduta di potenziale che si verifica nei resistori r ed R deve essere di conseguenza uguale e contraria alla differenza di potenziale esistente tra i poli del generatore. Tenendo inoltre conto che la corrente I circola sia in R sia in r , abbiamo:

$$\mathcal{E} = (r + R)I. \quad (7.46)$$

Se indichiamo con $V_2 - V_1 = RI$ la differenza di potenziale tra il punto 1 e il punto 2 di Fig. 7.8 potremo riscrivere la (7.46) nella forma

$$V_2 - V_1 = \mathcal{E} - Ir. \quad (7.47)$$

$V_2 - V_1$ rappresenta pertanto la differenza di potenziale tra i poli del generatore quando questo eroga una corrente I . Osserviamo che questa differenza di potenziale è più piccola di quella che si ha a circuito aperto, cioè per $I = 0$, data da \mathcal{E} . Quando il termine Ir è molto piccolo, quando cioè la resistenza interna del generatore è trascurabile rispetto alla resistenza sulla quale il generatore è chiuso, si può confondere la differenza di potenziale $V_2 - V_1$ con la forza elettromotrice del generatore.

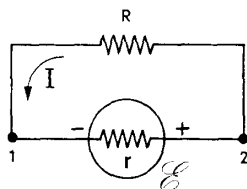


FIG. 7.8 - Generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} con resistenza interna r chiuso su un resistore di resistenza R

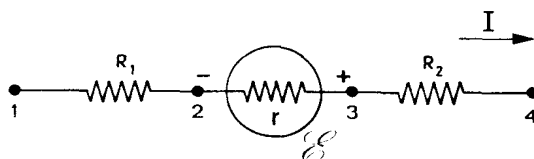


FIG. 7.9 - Ramo di circuito contenente due resistori ed una forza elettromotrice.

Esaminiamo ora il tratto di circuito di Fig. 7.9 composto da due resistori in serie e da un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} con resistenza interna r .

La corrente I , che attraversa il generatore dal polo negativo a quello positivo, è concorde con la corrente che il generatore tende a far circolare. Applicando la legge di Ohm e la relazione (7.47) ai vari tratti abbiamo:

$$V_1 - V_2 = IR, \quad V_2 - V_3 = Ir - \mathcal{E} \quad V_3 - V_4 = IR_2 \quad (7.48)$$

da cui sommando e ponendo $R = R_1 + R_2 + r$, resistenza totale del tratto di circuito, si ha:

$$V_1 - V_4 + \mathcal{E} = IR. \quad (7.49)$$

Questa relazione rappresenta la legge di Ohm generalizzata al caso in cui in un tratto di circuito sia inserita una forza elettromotrice.

7.10 La legge di Joule

Quando una carica q passa da un punto P_1 a potenziale V_1 ad un punto P_2 a potenziale V_2 subisce una variazione di energia potenziale uguale a:

$$W_{12} = q(V_1 - V_2). \quad (7.50)$$

La corrente che attraversa un conduttore, connesso ai poli di un generatore, è formata da cariche libere che si muovono da punti ove posseggono energia potenziale maggiore a punti ove posseggono energia potenziale minore: le cariche positive si spostano cioè nella direzione e verso del campo elettrico che è quello dei potenziali decrescenti, le cariche negative in direzione opposta.

Se generalizziamo la (7.50) al caso di spostamento di più cariche, cioè al caso della corrente, possiamo dire che in seguito al passaggio delle cariche tra i punti P_1 e P_2 si libera una certa quantità di energia, che rappresenta l'energia elettrica disponibile. Questa energia a seconda dei casi può essere trasformata in calore, in lavoro meccanico o altro. La maniera in cui viene trasformata dipende dal tipo di conduttore compreso tra i punti P_1 e P_2 in cui passa la corrente. Se tra i due punti è posto un conduttore metallico avremo sviluppo di calore, se tra i due punti c'è un motore elettrico avremo produzione di lavoro meccanico, se tra P_1 e P_2 è situata una cella elettrolitica si genererà un aumento di energia chimica. In ogni caso l'energia elettrica disponibile sarà fornita da un generatore

elettrico attraverso un processo di trasformazione di lavoro meccanico (macchine elettrostatiche o elettromagnetiche), di energia chimica (pile e accumulatori), di energia termica (pile termoelettriche) ecc.

Prendiamo in esame il caso più semplice, cioè quando tra i punti P_1 e P_2 sia posto un conduttore metallico percorso da una corrente I . L'esperienza dimostra che il passaggio di corrente provoca un riscaldamento del conduttore. Calcoliamo la energia dissipata nel conduttore sotto forma di calore.

La quantità di carica che attraversa il conduttore in un intervallo di tempo dt è:

$$dq = I dt. \quad (7.51)$$

La variazione di energia potenziale, e quindi l'energia elettrica trasformata in calore nel tempo dt , per la (7.50) sarà:

$$dW = (V_1 - V_2) I dt. \quad (7.52)$$

Questa espressione prende il nome di *legge di Joule*. Se per il conduttore in questione vale la legge di Ohm, la (7.52) può essere messa nella forma:

$$dW = RI^2 dt \quad (7.53)$$

oppure nella forma:

$$dW = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} dt \quad (7.54)$$

dove R rappresenta la resistenza del conduttore.

Nel caso di correnti stazionarie l'energia W dissipata in un tempo t si ottiene sostituendo nelle espressioni precedenti t a dt .

L'energia che si sviluppa nel conduttore per unità di tempo, cioè la potenza, risulta essere:

$$P = (V_1 - V_2) I. \quad (7.55)$$

Nel caso che per il conduttore valga la legge di Ohm abbiamo:

$$P = RI^2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}. \quad (7.56)$$

Ricordiamo che nel sistema M.K.S. l'energia viene misurata in joule e la potenza in watt (1 watt = 1 joule/s). Supponiamo ora che il conduttore metallico sia inserito tra i poli di un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} e resistenza interna r . Avremo allora per la (7.55):

$$P = \mathcal{E} I \quad (7.57)$$

che mediante la (7.43) si trasforma in:

$$P = I^2 (R + r) = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)}. \quad (7.58)$$

La (7.58) rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule in tutto il circuito; in particolare nel conduttore di resistenza R essa sarà uguale a:

$$P_R = RI^2 = \frac{R\mathcal{E}^2}{(R + r)^2}. \quad (7.59)$$

Supponiamo che R sia variabile; differenziando la (7.59) rispetto ad R avremo:

$$\text{risultato che mostra come } \frac{dP_R}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2 (R + r)^2 - 2R\mathcal{E}^2 (R + r)}{(R + r)^4} = \frac{\mathcal{E}^2 (r - R)}{(R + r)^3}, \quad (7.60)$$

P_R sia

massima quando $r = R$. Questo esempio è un caso particolare di una proprietà molto generale la quale stabilisce che, dato un generatore con resistenza interna r , se si desidera trasferire la massima potenza su un conduttore che sia posto tra i suoi poli (detto carico) è necessario che la sua resistenza R sia uguale a quella interna del generatore.

Discutiamo ora più in particolare il meccanismo per mezzo del quale l'energia elettrica si trasforma in calore in un conduttore. Nel paragrafo 7.4 si è visto che gli elettroni di conduzione sotto l'azione del campo elettrico applicato, nell'intervallo di tempo τ tra due urti successivi, vengono accelerati acquistando così energia cinetica. Nel nostro modello abbiamo inoltre supposto che questa energia venga completamente ceduta agli ioni in ogni urto. Da questo risulta che l'energia elettrica fornita dal generatore viene dapprima trasformata in energia cinetica dagli elettroni e poi per mezzo delle collisioni in moto termico dagli ioni, oscillanti intorno alla loro posizione di equilibrio nel reticolo, con conseguente aumento della temperatura del conduttore.

Consideriamo un elemento di volume dv di un conduttore con N elettroni liberi per unità di volume.

Nell'unità di tempo all'interno del volume dv avvengono $N dv/\tau$ collisioni. In un certo istante dopo l'ultima collisione il campo elettrico \mathbf{E} in media avrà compiuto su di un elettrone un lavoro uguale a $-eE u_D \tau$. Questa quantità non è altro che il prodotto della forza esercitata sull'elettrone $-eE$ per lo spostamento medio dopo l'ultima collisione $u_D \tau$. Avremo quindi che nell'unità di tempo nel volume dv viene dissipata per urti con gli ioni una energia data da:

$$dP = -\frac{N dv}{\tau} eE u_D \tau = \frac{N e^2 \tau}{m} E^2 dv = \sigma E^2 dv. \quad (7.61)$$

La
forma

finale di questa

espressione è stata ottenuta utilizzando per u_D la relazione (7.20) e per σ la relazione (7.23).

Se il conduttore considerato è un filo metallico di lunghezza l e sezione S e se ai suoi capi esiste una differenza di potenziale $V_1 - V_2$, la potenza complessiva dissipata in tutto il corpo è:

$$P = \sigma E^2 lS = \frac{\sigma (V_1 - V_2)^2 lS}{l^2} = \frac{\sigma S}{l} (V_1 - V_2)^2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad (7.62)$$

dove con $R = \frac{l}{\sigma S}$ abbiamo indicato la resistenza del conduttore. Riotteniamo

così la legge di Joule che avevamo già introdotto con considerazioni macroscopiche.

7.11 Lavoro di estrazione di un elettrone da un metallo

Nei paragrafi precedenti abbiamo descritto il comportamento del gas di elettroni liberi di un metallo sotto l'azione di un campo elettrico. Vogliamo ora renderci conto del motivo per il quale il gas di elettroni, in condizioni normali, rimane confinato all'interno del metallo, e illustrare alcuni metodi che possono essere impiegati per estrarre gli elettroni da un conduttore. Prendiamo in esame un conduttore omogeneo, scarico, in assenza di corrente e a temperatura costante. Gli elettroni all'interno del corpo sono soggetti ad un moto di agitazione termica; inoltre subiscono l'influenza del potenziale generato dagli ioni del reticolo, in modo che l'energia potenziale dell'elettrone ha un andamento come quello mostrato in Fig. 7.10 dove l'ascissa rappresenta una qualsiasi direzione all'interno del materiale. Una tale configurazione può essere ottenuta come sovrapposizione di più andamenti del tipo di quello illustrato in Fig. 6.6 in conseguenza della disposizione regolare degli ioni nel reticolo cristallino.

In questo schema gli elettroni legati sono quelli aventi una energia totale che cade all'interno delle *buche di potenziale*, come per il caso dell'elettrone con livello a di energia indicato in Fig. 7.11. Tale elettrone può compiere solo piccole oscillazioni intorno al nucleo tra i punti P_1 e P_2 . Infatti mentre l'elettrone in un punto generico P_3 possiede una energia potenziale che è quella rappresentata in figura dal tratto P_3P_4 , e una energia cinetica data dal tratto P_3P_4 , quando è in P_1 è dotato di una energia esclusivamente potenziale e quindi viene riflesso.

Gli elettroni liberi di conduzione invece hanno energie totali del tipo di quella che in Fig. 7.10 è rappresentata dalla retta tratteggiata b , e sono perciò quegli elettroni il cui livello di energia non incontra mai all'interno del metallo la curva del potenziale.

Come si vede in figura esiste tuttavia, nella regione di separazione tra il metallo e il vuoto, una *barriera di potenziale* che impedisce agli elettroni di conduzione

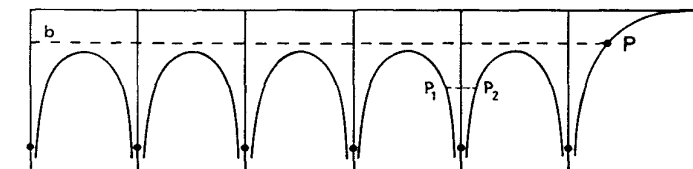


FIG. 7.10 - Andamento dell'energia potenziale degli elettroni all'interno di un conduttore in funzione di una direzione arbitraria.

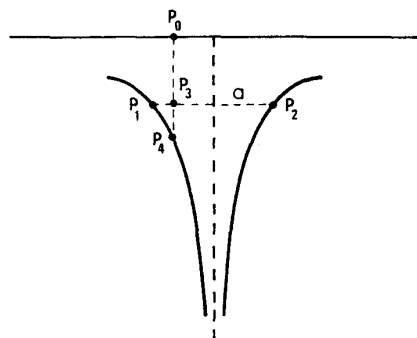


FIG. 7.11 - Un elettrone che abbia all'interno del conduttore una energia totale rappresentata dal livello a della figura compie un moto oscillatorio tra i punti P_1 e P_2 .



FIG. 7.12 - I livelli energetici degli elettroni liberi di un conduttore possono essere considerati come se fossero contenuti in una buca di potenziale di altezza W_e .

di uscire dal metallo. Nel punto P l'energia cinetica dell'elettrone libero si annulla ed esso viene riflesso.

L'esistenza di tale barriera può essere spiegata tenendo conto che alcuni elettroni, con una componente della velocità perpendicolare alla superficie di separazione metallo vuoto, abbandonano il metallo lasciando in esso un eccesso di carica positiva, chiamata *carica immagine*. Tra la carica immagine e l'elettrone si esercita allora una forza di tipo coulombiano che tende a richiamare l'elettrone all'interno del metallo impedendogli di allontanarsi da esso. Va inoltre considerato quanto accade in uno strato di dimensioni atomiche attorno alla superficie del metallo. Gli atomi più interni sono circondati in tutte le direzioni da altri atomi e sono quindi legati al reticolo in maniera simmetrica. Gli atomi prossimi alla superficie posseggono legami soltanto verso l'interno del metallo. Quindi alcuni degli elettroni periferici di questi atomi rimangono liberi da legami e costituiscono una nube di carica negativa che contribuisce a creare una barriera di potenziale diretta in maniera tale da trattenere gli elettroni.

Poiché ci occupiamo solamente degli elettroni liberi, dato che quelli legati non intervengono nei fenomeni che stiamo studiando, possiamo con buona approssimazione sostituire per essi l'andamento dell'energia potenziale di Fig. 7.10 con quello mostrato in Fig. 7.12.

In questo schema abbiamo inoltre sostituito l'andamento asintotico dell'energia potenziale con un andamento a gradino. Poiché, come sappiamo, hanno importanza soltanto differenze di energia potenziale, prenderemo come

livello zero dell'energia quello corrispondente al fondo della buca di potenziale e indicheremo con W_a l'energia potenziale che l'elettrone possiede a distanza infinita dal metallo.

Ricordando inoltre quanto detto a suo tempo sulla distribuzione energetica degli elettroni, assumeremo che in una banda di conduzione di un metallo *freddo* (in pratica anche alla temperatura ordinaria), tale distribuzione sia quella di un gas di Fermi quasi completamente degenere. Di conseguenza l'energia massima di un elettrone è assai prossima all'energia di Fermi, la quale per definizione è l'energia del livello cui compete la probabilità $\frac{1}{2}$ di essere occupato e che, in condizioni di completa degenerazione (a rigore per $T=0$), coincide con l'energia massima della distribuzione elettronica stessa.

Per portare un elettrone all'esterno del metallo bisognerà fornirgli pertanto, in condizioni normali, una energia:

$$\phi_e = W_a - E_F \quad (7.63)$$

che prende il nome di *lavoro di estrazione*. Il potenziale ϕ_e/e è detto *potenziale di estrazione* di un metallo. Il lavoro di estrazione è una quantità caratteristica di ogni sostanza e dipende dalla purezza del materiale e dallo stato della sua superficie. In Tabella 7.2 sono riportati i valori dell'energia di Fermi e dell'energia di estrazione per alcune sostanze.

Diversi meccanismi possono essere utilizzati per fornire agli elettroni l'energia sufficiente per uscire da un materiale.

Uno di questi è l'*effetto fotoelettrico* che consiste nella emissione di elettroni prodotta dall'assorbimento di radiazione elettromagnetica di opportuna frequenza

Tabella 7.2.

| Materiale | Energia di Fermi (eV) | Lavoro di estrazione | | A (ampere \cdot cm $^{-2}$ \cdot °C $^{-2}$) | Soglia fotoelettrica (cicli/s) |
|-----------|-----------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|---|--------------------------------------|
| | | Dall'effetto fotoelettrico (eV) | Dall'effetto termoionico (eV) | | |
| Cesio | 1,6 | 4,7 | 4,5 | 160 | $0,46 \times 10^{15}$ |
| Potassio | 2,1 | 2,2 | — | — | $0,55 \times 10^{15}$ |
| Calcio | 3 | 3,2 | 2,2 | 60,2 | — |
| Sodio | 3,1 | 2,3 | — | — | $0,57 \times 10^{15}$ |
| Litio | 4,7 | 2,3 | — | — | — |
| Tantalio | 5,2 | 4,1 | 4,0 | 60,2 | — |
| Argento | 5,5 | 4,7 | 4,3 | 107 | — |
| Oro | 5,6 | 4,82 | 4,25 | 100 | — |
| Wolframio | 5,8 | 4,6 | 4,6 | 60,2 | $1,1 \times 10^{15}$ |
| Molibdeno | 5,9 | 4,3 | 4,3 | 60,2 | $1,0 \times 10^{15}$ |
| Zinco | 5,9 | 3,3 | — | — | — |
| Platino | 6,0 | 6,35 | 5,3 | 30 | — |
| Rame | 7 | 4,1 | 4,5 | 110 | — |
| Nichel | 7,4 | 4,9 | 5,0 | 27 | $1,2 \times 10^{15}$ |

Un forte campo elettrico esterno applicato alla superficie di un metallo inoltre può abbassare la buca di potenziale e rendere più facile l'estrazione degli elettroni. Questo fenomeno prende il nome di *emissione di campo*. Un terzo metodo consiste nell'emissione di elettroni causato dall'aumento della temperatura del metallo. Tale meccanismo prende il nome di *effetto termoionico*.

7.12 Effetto termoionico

Come appare dall'espressione della distribuzione di Fermi (6.11) all'aumentare della temperatura aumenta la possibilità di occupazione dei livelli energetici superiori e quindi il numero di elettroni con energia superiore al livello di Fermi. Quando l'energia KT posseduta dagli elettroni più energetici, appartenenti alla *coda* della distribuzione, è dell'ordine o superiore all'energia di estrazione, si ha emissione elettronica.

Il numero di elettroni emessi in un secondo per unità di superficie da un metallo a temperatura T risulta dato dalla formula di Richardson:

$$J = AT^2 e^{-\frac{\phi_e}{KT}} \quad (7.64)$$

dove A dovrebbe essere una costante universale per tutti i metalli. Sperimentalmente si trova che per molti metalli puri A è sensibilmente la stessa e vale $60,2 \times 10^4$ ampere/metro² · grado², che è in buon accordo con il valore previsto teoricamente. L'effetto termoionico può essere prodotto utilizzando il riscaldamento per effetto Joule generato dal passaggio di una corrente in un filamento metallico.

7.13 Potenziale di Volta ed effetto Peltier

Quando due conduttori metallici 1 e 2 in equilibrio termico con differente energia di Fermi e differenti lavori di estrazione, $\Phi_1 > \Phi_2$, sono posti in contatto, come mostrato in Fig. 7.13, avviene che gli elettroni tendono a portarsi nel metallo

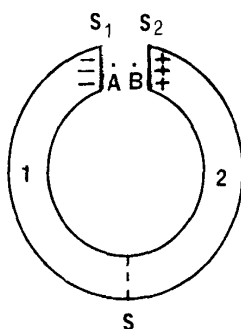


FIG. 7.13 - Due conduttori metallici diversi in contatto.

in cui compete loro una energia potenziale minore. Attraversando la superficie di contatto S dei due materiali, gli elettroni abbandonano il metallo con lavoro di estrazione minore, nel caso in esame il conduttore 2, e passano nel metallo con lavoro di estrazione maggiore, cioè il conduttore 1. Come risultato di questo moto degli elettroni, il metallo con lavoro di estrazione minore rimane carico positivamente, mentre quello con potenziale di estrazione maggiore si carica negativamente.

Il flusso degli elettroni si interrompe soltanto quando essi arrivano a possedere in tutti e due i metalli la medesima energia.

All'equilibrio inoltre, come conseguenza del passaggio di elettroni da uno all'altro dei due metalli a contatto, i livelli di Fermi dei due materiali tendono ad assumere valori circa eguali. In effetti tra di essi permane una piccola differenza, dovuta al fatto che, essendo i due conduttori diversi, è diversa la densità di elettroni di conduzione. A causa quindi delle diverse pressioni dei due gas di elettroni attraverso la superficie di contatto dei due metalli, esiste una diffusione di elettroni che è responsabile del sussistere di una piccola differenza di potenziale interna nota come *differenza di potenziale Peltier*.

Il valore di questa differenza di potenziale è generalmente compreso tra 10^{-2} e 10^{-4} volt. Tenendo conto di quanto detto, è possibile scrivere, per l'energia totale degli elettroni all'interno del sistema formato dai due conduttori, in condizioni di equilibrio, la seguente relazione:

$$E_{F_1}^* - W_{a_1} - e\varphi_1 = E_{F_2}^* - W_{a_2} - e\varphi_2 \quad (7.65)$$

dove con $E_{F_1}^*$ ed $E_{F_2}^*$ indichiamo le energie di Fermi dei due metalli in contatto,

che differiscono da quelle dei due metalli isolati, e che, solo in prima approssimazione, possono essere considerate uguali, e con φ_1 , e φ_2 i potenziali elettrostatici generati dalla separazione di cariche dovuta al passaggio degli elettroni da uno all'altro materiale. Ponendo per semplicità:

$$W_i = -eV_i = -W_a - e\varphi \quad (7.66)$$

dove W_i ed eV_i , indicano rispettivamente l'energia potenziale interna totale ed il potenziale interno di un elettrone nel materiale, dalla (7.65) ricaviamo che:

$$V_{i_2} - V_{i_1} = \Pi_{12} = \frac{E_{F_2}^* - E_{F_1}^*}{e}$$

che rappresenta la differenza di potenziale Peltier.

Trascurando questa differenza di potenziale Π_{12} si può affermare che all'equilibrio i potenziali elettrostatici interni dei materiali sono uguali.

Il lavoro di estrazione degli elettroni Φ_e è una quantità caratteristica di una determinata sostanza e non viene modificata dal contatto con sostanze differenti. Di conseguenza per un elettrone la differenza tra l'energia potenziale all'esterno del materiale e quella all'interno è uguale al lavoro di estrazione Φ_e .

Indicando con W_{eA} e W_{eB} l'energia potenziale dell'elettrone in punti esterni molto prossimi alle superfici S_1 e S_2 che separano i metalli dal vuoto o da un dielettrico qualsiasi, si può allora scrivere che:

$$W_{eA} - W_{i1} = \Phi_{e1}$$

$$W_{eB} - W_{i2} = \Phi_{e2}$$

(7.68)

Sottraendo la seconda relazione dalla prima, si ottiene:

$$W_{eA} - W_{eB} = (\Phi_{e1} - \Phi_{e2}) - (W_{i1} - W_{i2}) \quad (7.69)$$

e dividendo per il modulo e della carica dell'elettrone si ha:

$$V_B - V_A = \frac{(\Phi_{e1} - \Phi_{e2})}{e} + (V_{i2} - V_{i1}) = \frac{(\Phi_{e1} - \Phi_{e2})}{e} + \Pi_{12}. \quad (7.70)$$

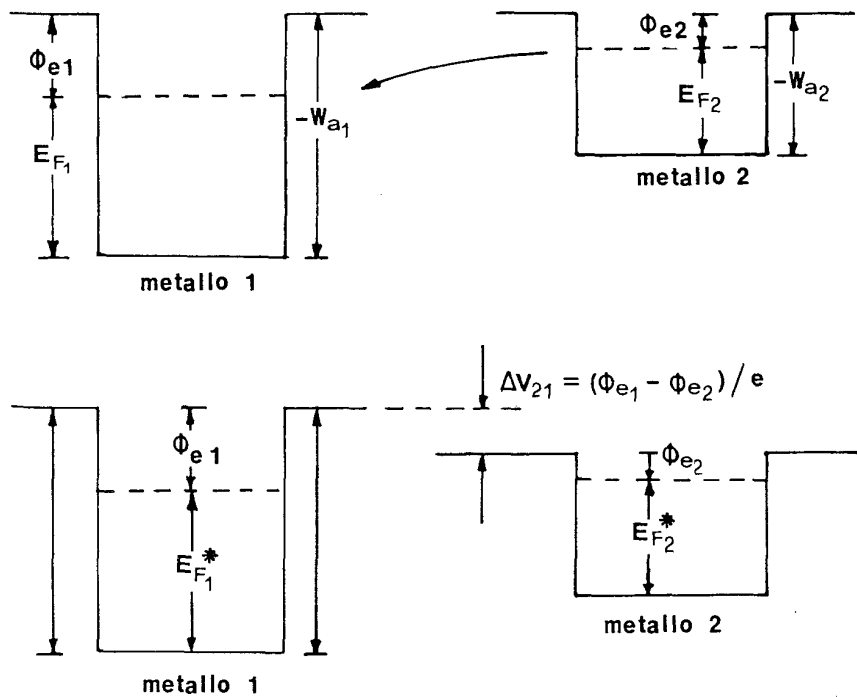


FIG. 7.14 a) - Due conduttori metallici prima del contatto. Il conduttore 1 ha un lavoro di estrazione maggiore di quello del conduttore 2.

I livelli di Fermi dei due materiali sono diversi.

FIG. 7.14 b) - I due conduttori dopo il contatto. Si è trascurata la piccola differenza tra i due livelli di Fermi.

La (7.70) permette di affermare che tra due punti esterni di due metalli diversi a contatto, alla stessa temperatura, si stabilisce una differenza di potenziale che prende il nome di *differenza di potenziale di Volta o di contatto*.

Tale differenza di potenziale risulta dalla somma di tre salti di potenziale localizzati sulle superficie di discontinuità, e cioè la superficie S_1 di separazione tra il vuoto ed il primo metallo, la superficie S di separazione tra i due metalli e la superficie S_2 di separazione tra il secondo metallo ed il vuoto. Se si tiene conto che generalmente $V_B - V_A$ è dell'ordine del volt, nella (7.70) può essere trascurata la differenza di potenziale Peltier Π_{12} , e si arriva a concludere che la differenza di potenziale di Volta è uguale alla differenza dei potenziali di estrazione dei due metalli.

Nel caso in cui il primo materiale sia il rame ($\Phi_{e\text{ Cu}} \sim 4,3$ eV) ed il secondo lo zinco ($\Phi_{e\text{ Zn}} \sim 3,3$ eV), avviene che lo zinco cede elettroni al rame, il quale assume una carica negativa mentre lo zinco rimane carico positivamente. La differenza di potenziale tra due punti esterni a questi due materiali risulta dell'ordine del volt, mentre la differenza di potenziale Peltier è dell'ordine di 4×10^{-4} volt e risulta positiva passando dallo zinco al rame. Se introducessimo un elettrone nella regione compresa tra S_1 e S_2 , con riferimento a Fig. 7.13, questo si muoverebbe nella direzione che va dal metallo carico negativamente a quello carico positivamente, per esempio dal rame allo zinco, andando così ad annullare una carica positiva. Come conseguenza di ciò un nuovo elettrone tenderebbe ad attraversare la superficie S' di contatto tra i due materiali, passando dallo zinco al rame e ristabilendo la condizione di equilibrio. In Fig. 7.14 a e 7.14 b sono schematizzati i due metalli prima e dopo il contatto.

Tutto questo non deve però far supporre che, mediante l'effetto Volta, sia possibile far circolare una corrente lungo un circuito conduttore chiuso. Immaginiamo infatti di collegare tra loro le due superfici S_1 ed S_2 di Fig. 7.13: si ottiene un anello chiuso formato da due conduttori, ad esempio rame e zinco, a contatto lungo due superficie. I potenziali interni dei due corpi costituenti l'anello chiuso sono, per quanto detto in precedenza, uguali a meno delle piccole differenze di potenziale Peltier esistenti alle superficie di contatto. Se ci si sposta lungo l'anello con un verso scelto a caso, si incontrano le due differenze di potenziale Peltier aventi ugual valore in modulo ma con segno discorde. La conclusione è pertanto che non esiste lungo l'anello nessuna forza elettromotrice in grado di mantenere in moto gli elettroni e sostenere una corrente elettrica.

Prendiamo in esame, come mostrato in Fig. 7.15, un conduttore metallico 1 posto a contatto, negli estremi S_1 ed S_2 , con un altro conduttore metallico 2. Il sistema sia tenuto alla stessa temperatura.

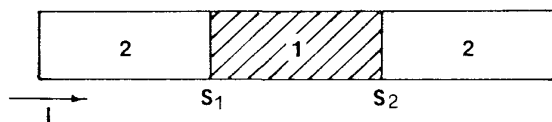


FIG. 7.15 - Catena aperta di due metalli.

Se una corrente elettrica di intensità I attraversa la catena di conduttori, si può mettere in evidenza, con un opportuno dispositivo sperimentale, che la regione prossima ad una delle due superficie di contatto si riscalda mentre la regione prossima all'altra superficie di contatto si raffredda.

Invertendo il verso della corrente, anche il comportamento delle due giunzioni si inverte. La quantità di calore ΔQ , misurabile per esempio mediante calorimetri, sviluppato od assorbito alle due giunzioni, risulta proporzionale alla quantità Δq di carica che è fluuta:

$$\Delta Q = c_{12} \Delta q = c_{12} I \Delta t \quad (7.71)$$

la costante di proporzionalità c_{12} dipende dalla natura dei metalli in contatto e dalla loro temperatura, ma non dalle dimensioni della superficie di contatto, né dalla intensità di corrente.

La quantità di calore data dalla (7.71) non può essere giustificata mediante l'effetto Joule, che è in ogni caso sempre presente e si sovrappone all'effetto in oggetto, essendo esso indipendente dal verso in cui fluisce la corrente e producendo comunque solo sviluppo di calore. Risulta d'altra parte sperimentalmente evidente che tale fenomeno è strettamente collegato alla discontinuità esistente nei punti di contatto tra i due conduttori diversi, in cui noi sappiamo esistere una differenza di potenziale Peltier Π_{12} . La spiegazione dell'effetto può allora essere trovata tenendo conto del fatto che gli elettroni di conduzione che danno luogo alla corrente, attraversando una giunzione, incontrano una forza elettromotrice concorde, che compie quindi su di essi un lavoro, aumentandone l'energia potenziale, mentre attraversando l'altra giunzione incontrano una forza elettromotrice discorde, contro la quale essi compiono un lavoro a spese della propria energia potenziale, che quindi diminuisce. In definitiva, alla prima giunzione gli elettroni della corrente incrementano la propria energia a spese del gas di elettroni liberi del metallo responsabili della forza elettromotrice di Peltier, mentre alla seconda giunzione gli elettroni della corrente cedono energia al gas di elettroni liberi del metallo. Poiché il gas di elettroni è in equilibrio termico con il reticolo cristallino, si ha che un aumento od una diminuzione locale della loro energia si ripercuote direttamente anche sull'energia locale del reticolo stesso, provocando una dissipazione od un assorbimento di calore che è misurabile come aumento o diminuzione di temperatura di calorimetri posti a contatto con le giunzioni.

Per quanto detto e per la (7.71) è facile constatare come il coefficiente di proporzionalità c_{12} non sia altro che la forza elettromotrice di Peltier, Π_{12} . Tale coefficiente prende così il nome di *coefficiente di Peltier* del materiale e l'effetto viene generalmente indicato come *effetto Peltier*. La (7.71) può quindi essere scritta nella forma:

$$\Delta Q = \Pi_{12} I \Delta t. \quad (7.72)$$

I valori di Π_{12} sono molto piccoli; ad esempio a temperatura ordinaria si ha che

$$\Pi_{\text{Bi, Sn}} = 2,7 \times 10^{-2} \text{ V}, \quad \Pi_{\text{Cu, Fe}} = 2,3 \times 10^{-3} \text{ V}, \quad \Pi_{\text{Cu, Zn}} = 4 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

7.14 Effetto fotoelettrico

Una radiazione luminosa di opportuna frequenza, inviata sulla superficie di un materiale, può produrre un'emissione di elettroni. Un apparato sperimentale utilizzato per mettere in luce questo effetto è quello mostrato in Fig. 7.16. In un recipiente, in cui è praticato il vuoto, vengono posti due elettrodi (catodo ed anodo) tra cui è possibile stabilire una differenza di potenziale variabile. La radiazione luminosa, che si suppone monocromatica, passando attraverso

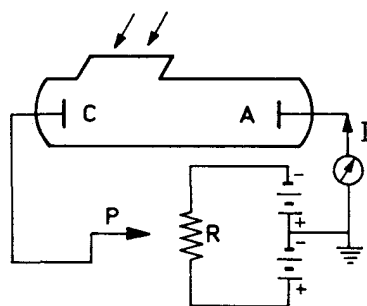


FIG. 7.16 - Schema di una apparecchiatura per la rilevazione dell'effetto fotoelettrico. Anodo e catodo sono posti in un contenitore tenuto a bassa pressione.

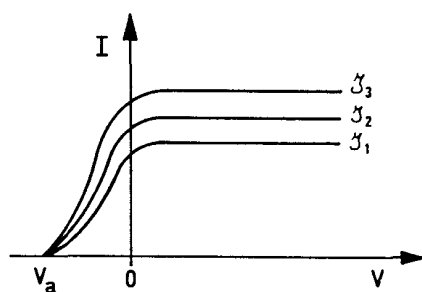


FIG. 7.17 - Andamento della corrente in funzione della differenza di potenziale tra anodo e catodo per tre differenti valori di intensità luminosa di una stessa radiazione monocromatica con $\nu > \nu_0$.

una finestra trasparente di quarzo incide sul catodo estraendo elettroni. Se essa ha una determinata frequenza, il sistema è attraversato da una debole corrente di verso concorde con quella generata dal moto degli elettroni che,

estratti dal catodo, si dirigono verso l'anodo. Il passaggio di corrente avviene entro un intervallo di 10^{-8} secondi dall'istante in cui il catodo viene illuminato. Le caratteristiche dell'effetto sono le seguenti:

1) Non vi è passaggio di corrente quando la radiazione, indipendentemente dalla sua intensità, ha una frequenza ν inferiore ad un certo valore ν_0 detto *frequenza di soglia fotoelettrica*. Il valore ν_0 è caratteristico del materiale. Nella Tabella 7.2 sono riportate per alcuni materiali le frequenze di soglia.

2) L'andamento della corrente in funzione della differenza di potenziale applicata tra catodo e anodo è riportata in Fig. 7.17, che si riferisce ad una radiazione monocromatica per tre diversi valori dell'intensità luminosa

$$I_1 > I_2 > I_3.$$

. La corrente ha inizio, per qualunque I , in corrispondenza ad un determinato valore V_a negativo del potenziale dell'anodo e si satura quando tutti gli elettroni emessi dal catodo sono raccolti dall'anodo. Il fatto che la corrente elettronica non si annulli per $V = 0$, quando anodo e catodo sono cioè allo stesso potenziale, ma che anzi sussista quando il potenziale dell'anodo è negativo rispetto a quello del catodo, mostra che gli elettroni vengono emessi con una velocità non nulla e possono raggiungere l'anodo anche in presenza di un campo elettrico che li decelererà. Il potenziale V_a è detto *potenziale d'arresto*. Il valore di tale potenziale può essere immediatamente collegato con l'energia cinetica massima degli elettroni emessi. Si ha infatti:

$$eV_a = \frac{1}{2} m u_{\max}^2. \quad (7.73)$$

3) L'intensità della corrente di saturazione e quindi il numero di elettroni emessi è proporzionale all'intensità luminosa della radiazione, vedi Fig. 7.17.

4) All'aumentare della frequenza ν della radiazione incidente, per valori superiori a quello di soglia, il potenziale V_a cresce in valore assoluto secondo la relazione:

$$V_a = K (\nu - \nu_0). \quad (7.74)$$

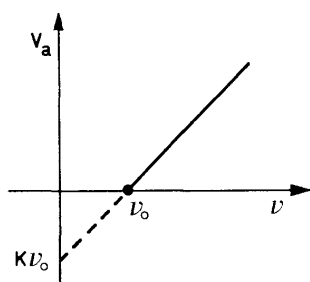


FIG. 7.18 - Potenziale di arresto in funzione della frequenza della radiazione incidente.

In Fig. 7.18 è riportato l'andamento di V_a in funzione di v ; K è il coefficiente angolare della retta.

Dalla (7.74) moltiplicando per e si ottiene:

$$e V_a = Kev - Kev_0 = Kev - \phi_e. \quad (7.75)$$

Come già detto eV_a rappresenta l'energia cinetica massima con cui gli elettroni più veloci vengono emessi, mentre Kev_0 rappresenta il minimo lavoro necessario per estrarre l'elettrone dalla superficie del catodo e quindi coincide con il lavoro di estrazione ϕ_e . Il prodotto eK , determinabile per via sperimentale, risulta eguale a $6,62 \cdot 10^{-34}$ joule-secondo, cioè lo stesso valore della costante universale di Planck h .

I dati sperimentali dell'effetto fotoelettrico non possono essere interpretati con la teoria ondulatoria della luce, per la quale l'energia è distribuita con continuità entro il fascio incidente e gli elettroni possono essere emessi qualunque sia la frequenza della radiazione incidente, purché di intensità sufficiente. Oltre a non spiegare l'esistenza della soglia, la teoria ondulatoria prevede, in contraddizione con l'esperienza, un aumento dell'energia cinetica degli elettroni emessi al crescere dell'intensità luminosa.

Per interpretare questo fenomeno Einstein riprese ed ampliò l'ipotesi di Planck sulla quantizzazione dell'energia. Secondo questa ipotesi ogni processo di emissione o assorbimento di radiazione da parte di un corpo è costituito da una serie di eventi elementari, in ognuno dei quali si manifestano scambi di energia W legati alla frequenza ν della radiazione dalla relazione:

$$W = h\nu \quad (7.76)$$

ove h è la costante di Planck.

Con questa ipotesi Planck era riuscito ad interpretare lo spettro del corpo nero, problema che aveva posto in crisi la fisica classica.

Secondo Einstein, non soltanto gli scambi di energia tra radiazione e materia avvengono in maniera *quantizzata* ma la stessa energia radiante si propaga nello spazio raggnippata in tanti *grani*, chiamati *quanti di luce* o *fotoni*, ciascuno dei quali possiede una energia $W = h\nu$.

L'effetto fotoelettrico può allora essere interpretato come un urto tra fotoni della radiazione ed elettroni della materia; in tale urto un elettrone, colpito da un fotone, ne può assorbire l'energia $h\nu$. Affinché avvenga l'effetto fotoelettrico è necessario che tale energia, trasportata dal fotone ed assorbita dall'elettrone, sia almeno eguale al lavoro di estrazione ϕ_e :

$$h\nu \geq \phi_e \quad (7.77)$$

da cui, ponendo $\phi_e/h = \nu_0$, si ottiene:

$$\nu \geq \nu_0 \quad (7.78)$$

relazione che spiega l'esistenza della soglia fotoelettrica. Se il quanto incidente sull'elettrone ha una frequenza superiore alla frequenza di soglia, l'elettrone emesso possiede anche una energia cinetica il cui valore massimo risulta dato da :

$$W_K = h\nu - \phi_e = h(\nu - \nu_0). \quad (7.79)$$

L'elettrone effettivamente acquista per effetto dell'urto con un fotone l'energia cinetica W_K , ma perde una parte di essa in urti con gli ioni del reticolo, per cui all'uscita dalla superficie emittente la sua energia varierà con continuità da zero fino al valore massimo dato dalla (7.79).

Al crescere dell'intensità della radiazione luminosa, se la frequenza è tenuta fissa, crescerà il numero di fotoni incidenti, e quindi il numero di elettroni emessi, ma non la loro energia. L'ipotesi dei quanti di luce costituisce quindi un modello soddisfacente per l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico. Misurando la frequenza di soglia, è possibile ricavare il lavoro di estrazione di una certa sostanza. La (7.75), che lega ν , V_a e ϕ_e , può essere usata, come già si è detto implicitamente, per determinare il valore numerico della costante h di Planck.